

Tesis de Posgrado

Cálculo perturbativo de los momentos de inercia nucleares

Acosta de Mehr, María Teresa

1985

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Acosta de Mehr, María Teresa. (1985). Cálculo perturbativo de los momentos de inercia nucleares. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1912_AcostadeMehr.pdf

Cita tipo Chicago:

Acosta de Mehr, María Teresa. "Cálculo perturbativo de los momentos de inercia nucleares". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1985.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1912_AcostadeMehr.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

CALCULO PERTURBATIVO DE LOS MOMENTOS DE INERCIA NUCLEARES

María Teresa Acosta de Mehr

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE
DOCTOR EN FISICA

DIRIGIDA POR
Daniel R. Bes

1985

Jesus 1912
g. 2

a Josef

(er weiss schon weshalb)

Es mucho lo que tengo que agradecer al Dr. Daniel Bes, director de esta tesis. Quiero mencionar principalmente su guía, ayuda y apoyo, así como su permanente preocupación por el desarrollo de la misma.

Al Dr. Roberto Liotta quiero agradecer de manera muy especial la colaboración y las enseñanzas brindadas durante cortos pero decisivos períodos en la concreción de este trabajo.

A mis compañeros en el camino que condujo a la realización de este trabajo, Patricia, Norberto y Alejandro, despojo de títulos y apellidos y colmo de reconocimiento por el apoyo que tanto en el aspecto profesional como en el personal siempre me brindaron.

El presente trabajo fue realizado en el Departamento de Física de la Comisión Nacional de Energía Atómica. Quiero dejar constancia de mi agradecimiento a las correspondientes autoridades que posibilitaron su realización.

I. INTRODUCCION.....	1
II. DESCRIPCION DEL METODO.....	5
2.1 Un poco de historia.....	5
2.2 Construcción de un Hamiltoniano efectivo para un sistema de fermiones que rota en el espacio.....	8
III. APLICACION DEL METODO AL CALCULO PERTURBATIVO DE LOS PARAMETROS INERCIALES DE UN NUCLEO DEFORMADO.....	17
3.1 Rompimiento de la simetría esférica: definición y propiedades de la base deformada.....	17
3.2 RPA en la base deformada.....	21
3.3 Consideraciones sobre la expansión perturbativa.....	32
3.4 Desarrollo perturbativo de la energía rotacional del sistema.....	38
3.5.1 Evaluación de las correcciones diagramáticas.....	43
3.5.2 Evaluación de los valores esperados de los operadores b_v en el estado fundamental RPA.....	49
3.5.3 Resultado final.....	53
IV. CALCULO DE LOS PARAMETROS ROTACIONALES DEL ^{24}Mg	56
4.1 El Hamiltoniano.....	56
4.2 Determinación de la base deformada.....	58
4.3 Tratamiento RPA del Hamiltoniano y cálculo de los momentos de inercia de orden cero.....	63

4.4 Cálculo numérico de las correcciones de primer orden a los parámetros inerciales del ^{24}Mg	70
4.5 Análisis de los resultados.....	73
V. CONCLUSIONES.....	82
APENDICE A.....	85
APENDICE B.....	91
APENDICE C.....	97
APENDICE D.....	107
REFERENCIAS.....	113

1. INTRODUCCION

Los momentos de inercia de un núcleo deformado que se determinan experimentalmente a partir de las bandas rotacionales de su espectro de energía, fueron calculados originalmente por Inglis (ref. [1]) mediante un modelo semiclásico conocido con el nombre de modelo de "cranking", en el cual las rotaciones del campo deformado de partícula independiente se imponen desde afuera del sistema. Por lo general, los momentos de inercia calculados en este esquema resultan muy grandes comparados con los valores experimentales. En muchos casos, en particular en los núcleos de las tierras raras, los resultados mejoran notablemente al hacer rotar el potencial en el que se mueven cuasi-partículas en las que se han incluido las correlaciones superfluídas (ref. [2]).

Thouless y Valatin (ref. [3]) realizaron cálculos autoconsistentes y corrigieron la fórmula de Inglis para los momentos de inercia incluyendo el efecto de una parte de la interacción residual entre los nucleones en el sistema de referencia que rota con el núcleo.

Existen algunos otros procedimientos cuánticos para calcular los parámetros de inercia de un sistema deformado, entre los que se cuentan los trabajos de Villars y Cooper (ref. [4]), Kerman y Klein (ref. [5]) y Marshalek y Weneser (ref. [6]). Los resultados de los dos primeros trabajos son equivalentes a los resultados de Thouless y Valatin y en ninguno de los dos casos se provee una manera sistemática, por ejemplo mediante una serie perturbativa, que permita ir más allá de esta

aproximación. No es así el caso del trabajo de Marshalek y Weneser, quienes utilizan la expansión bosónica perturbativa de Belyaev y Zelevinskii (refs. [7] y [8]) cuyo orden más bajo es exactamente la aproximación RPA. Por lo tanto, los parámetros de inercia de orden cero en este desarrollo son los de Thouless-Valatin y las respectivas correcciones son equivalentes a las correcciones que provee el método que utilizaremos en este trabajo (ref. [9]). Sin embargo, el método de Marshalek y Weneser ha sido tan sólo aplicado a sistemas modelísticos rotando en un plano. La extensión al espacio de tres dimensiones no es trivial, ni siquiera en el caso de un modelo (ref. [10]).

Es posible también calcular propiedades de sistemas deformados utilizando técnicas de proyección sobre el autoespacio del operador impulso angular en conexión con los métodos variacionales de Hartree-Fock o Hartree-Fock-Bogoliubov (refs. [11]). En detalle, estos métodos resultan muy complicados y requieren un gran esfuerzo numérico, especialmente si se trata de aplicarlos a sistemas sin simetría axial.

En el presente trabajo aplicamos el método cuántico perturbativo desarrollado en las refs. [12] para calcular formalmente correcciones a los momentos de inercia de Thouless-Valatin correspondientes a un núcleo deformado. La aparición de divergencias infrarrojas en teoría de perturbaciones asociadas con los modos de frecuencia cero correspondientes a las rotaciones libres del sistema como un todo, se evita en este método mediante la introducción explícita de variables intrínsecas y colectivas y eliminando los grados de libertad espúreos mediante la introducción de vínculos que impiden la rotación rígida del sistema (condición de gauge) y

simultaneamente conservan el impulso angular.

La expansión perturbativa se lleva a cabo en este caso general utilizando criterios semejantes a los desarrollados en la ref. [10] para el caso del modelo SU(3) de Elliott. Es decir, se expande alrededor de la solución RPA usando como parámetro de expansión una cantidad directamente relacionada con la deformación del sistema, a saber, el inverso del valor promedio del cuadrado del impulso angular total del sistema. La RPA provee entonces, en forma muy natural, los momentos de inercia de orden cero y las componentes partícula-agujero del operador ángulo canónicamente conjugado al operador impulso angular.

A partir de esta expansión, obtenemos una expresión para las correcciones a los momentos de inercia RPA, la cual incluye sistemáticamente todos los posibles términos de primer orden. Además, haciendo uso de la invariancia rotacional del Hamiltoniano original, podemos demostrar en forma absolutamente general que estas correcciones son finitas, en el límite en el que el sistema recobra la simetría esférica, e independientes del parámetro arbitrario que se introduce para satisfacer la condición de gauge. La expresión que obtenemos puede ser aplicada para calcular las correcciones a los momentos de inercia correspondientes a la banda del estado fundamental de cualquier sistema triaxial par-par (el número de partículas fuera de capa cerrada no genera, en principio, ninguna limitación).

Utilizando la misma interacción efectiva usada por McGrory (ref. [13]) en un cálculo de modelo de capas para los núcleos de la capa s-d, calculamos las correcciones a los momentos de inercia de Thouless-Valatin correspondientes al estado

fundamental del ^{24}Mg . Esta es la primera vez que se calculan a partir de un método enteramente cuántico los parámetros de inercia de un núcleo y, debido al hecho de que los parámetros inerciales de Thouless-Valatin resultan extremadamente pequeños, el método provee correcciones importantes. Es así como el espectro rotacional de bajas energías, correspondiente a los parámetros corregidos concuerda muy bien, para la banda con $K=0$, con el espectro de McGrory (el cual, a su vez, reproduce muy satisfactoriamente los resultados experimentales). Para los estados correspondientes a la banda γ , la concordancia es más pobre.

II. DESCRIPCION DEL METODO

2.1 Un poco de historia

El tratamiento perturbativo de cualquier sistema parte de la suposición de que el Hamiltoniano H que describe el sistema puede separarse en dos partes, $H_0 + H_{res}$, tales que los autoestados y energías de H_0 pueden ser determinados y proveen una descripción lo suficientemente buena del problema como para que el Hamiltoniano residual represente (en un sentido que es necesario precisar para cada caso) una pequeña corrección a H_0 .

Si el Hamiltoniano exacto H es invariante frente a una transformación de simetría representada por el operador S , es decir, $[H, S] = 0$, puede suceder que H_0 no lo sea, es decir, $[H_0, S] \neq 0$ (y necesariamente $[H_{res}, S] \neq 0$). Esta es una situación común en muchos campos de la física de problemas de muchos cuerpos y se la conoce con el nombre de rompimiento de la simetría asociada con el operador S . En este caso no es posible aplicar un tratamiento perturbativo tradicional, puesto que la consecuencia del rompimiento de una de las simetrías del Hamiltoniano exacto es la aparición de modos de frecuencia cero en el espectro de las pequeñas oscilaciones alrededor de H_0 que conducen a catástrofes infrarrojas en teoría de perturbaciones. En el caso del rompimiento de la simetría esférica, el origen de estos modos está asociado al hecho de que no existe una fuerza de restitución en la dirección angular para un sistema que rota libremente y, por lo tanto, el espectro de los modos normales contiene (además de los modos de frecuencia finita corres-

pondientes a los grados de libertad internos) estados espúreos de frecuencia cero correspondientes a la rotación rígida del sistema (ver sec. 3.2).

El mismo problema ocurre al tratar de asociar las soluciones clásicas localizadas (no disipativas) de una ecuación de campos no lineal (estas soluciones reciben el nombre de solitones) con los estados ligados y del continuo de un sistema cuántico extendido. Un sistema extendido es una partícula no puntual. Los hadrones, por ejemplo, no obstante ser llamados partículas elementales, son sistemas extendidos que en algunos cálculos pueden ser aproximados por partículas puntuales. Esta es la razón por la cual la cuantificación de los solitones tiene más que un interés académico. Si, por ejemplo, el solitón es la solución de una teoría invariante frente a traslaciones, un desarrollo en serie alrededor de estas soluciones localizadas en una región del espacio conlleva necesariamente modos de frecuencia cero.

Otra situación conceptualmente análoga se encuentra en teoría de campos al tratar de cuantificar en forma convencional una teoría de gauge (el electromagnetismo, por ejemplo). En este caso, la invariancia de gauge de los campos conduce a propagadores infinitos. Entre los métodos convencionales desarrollados para cuantificar teorías de campos se encuentran el método de cuantificación canónica en el que a las configuraciones de campo clásicas se les hace corresponder operadores que satisfacen relaciones canónicas de conmutación y el método de la integral funcional, originalmente introducido por Feynman (ref. [14]), que consiste en describir la dinámica cuántica del sistema mediante una suma sobre todas las posibles

configuraciones de campo clásicas.

Faddeev y Popov (ref. [15]) desarrollaron un método basado en la idea de Feynman de cuantificar la teoría mediante una integral funcional, pero tomando en cuenta que los campos que se transforman mediante una transformación de gauge representan la misma física y, por lo tanto, la integral funcional no debe efectuarse sobre todas las configuraciones de campo sino sobre un representante de cada conjunto de campos que se transforman entre sí mediante una transformación de gauge. Cada transformación de gauge que deje invariante el Hamiltoniano del sistema tiene un teorema de conservación asociado (en el caso del electromagnetismo, el teorema de conservación es la ley de Gauss que asegura la conservación de la carga eléctrica). La elección de los campos representantes hace que se pierda la libertad de efectuar transformaciones de gauge. Por consiguiente, el teorema de conservación correspondiente debe ser impuesto, a manera de vínculo, desde afuera. La situación análoga en el caso de un sistema deformado es impedir las rotaciones congelando el sistema en el espacio (fijando los ángulos de Euler) y asegurar mediante un vínculo la conservación del impulso angular.

En forma cualitativa hemos visto que los problemas de cuantificación de una teoría de gauge y de un sistema con vínculos son formalmente equivalentes. Basados en esta equivalencia Gervais, Jewicki y Sakita (ref. [16]) adaptaron el método de Faddeev y Popov para cuantificar los solitones introduciendo coordenadas colectivas en un esquema que corresponde a una generalización del método de separación de variables. En este caso, un problema con n grados de libertad y

\underline{c} modos de frecuencia cero se escribe en términos de \underline{i} coordenadas intrínsecas, \underline{c} coordenadas colectivas ($i+c=n$) y \underline{c} vínculos deshaciéndose así de los modos de frecuencia cero. Se demuestra que este nuevo problema es completamente equivalente al problema original, y, debido a la ausencia de modos espúreos de frecuencia cero, puede ser cuantificado en forma tradicional.

A su vez, Alessandrini, Bes y Machet (refs. [12]) utilizan la misma técnica utilizada por Gervais, Jewicki y Sakita y desarrollan un método que permite el tratamiento perturbativo de un sistema deformado de fermiones para el cual la simetría rota es una simetría perteneciente al grupo abeliano $U(1)$ (este es el caso de un sistema deformado que rota en un plano). Finalmente, Bes, Civitarese y Sofía (ref. [10]) extienden el formalismo al caso no abeliano en el que la simetría rota corresponde a transformaciones del grupo $SU(2)$. Este es el caso que nos interesa, pues corresponde a las rotaciones en tres dimensiones de un sistema de fermiones.

2.2 Construcción de un Hamiltoniano efectivo para un sistema de fermiones que rota en el espacio.

Como acabamos de mencionar, el método de las coordenadas colectivas hace uso de la equivalencia entre el problema que incluye sólo grados de libertad fermiónicos y el problema con vínculos que incluye grados de libertad fermiónicos (intrínsecos) y grados de libertad colectivos. En el primer caso, la amplitud de transición vacío-vacío Z (la suma a todo orden de todos los diagramas vacío-vacío conexos) está dada por

(ver refs. [10] y [17])

$$Z = N \prod_m \int D[b_m^+] D[b_m] \exp[i \int L(b_m, \dot{b}_m) dt] \quad (2.1)$$

donde N es una constante de normalización sin relevancia física, b_m^+ y b_m son los campos fermiónicos clásicos en el sistema de laboratorio y el símbolo $D[b] = D[b(t)]$ es la llamada medida de cada integral funcional e indica que la integral se efectúa sobre todas las posibles trayectorias clásicas $b(t)$. La cantidad $\int L(b_m, \dot{b}_m) dt$ es la acción clásica y $L(b_m, \dot{b}_m)$ es el Lagrangiano del sistema, el cual a su vez, en términos del Hamiltoniano se escribe como

$$L(b_m, \dot{b}_m) = i \sum_m b_m^+ \dot{b}_m - H(b_m^+, b_m) \quad (2.2)$$

con

$$b_m^+ = - \frac{\partial L(b_m, \dot{b}_m)}{\partial \dot{b}_m}$$

Efectuando ahora una transformación, definida en términos de los tres ángulos de Euler Φ_V , de los campos fermiónicos en el laboratorio a los campos fermiónicos a_m^+ y a_m en el sistema fijo al cuerpo

$$a_m^+(\Phi_V) = R(\Phi_V) b_m^+ \quad (2.3)$$

donde $R(\Phi_V)$ es el operador rotación, entonces, en el nuevo sistema, los ángulos de Euler Φ_V y sus impulsos canónicamente conjugados π_V forman un conjunto de variables colectivas correspondientes a los grados de libertad de un sistema que rota rígidamente y las variables a_m y a_m^+ corresponden a las

coordenadas e impulsos que describen los grados de libertad intrínsecos del sistema.

En la ref. [10] se demuestra que la amplitud dada en (2.1) es equivalente a la integral

$$\begin{aligned}
 Z = N \prod_{m,v} \int D[a_m^+] D[a_m] D[I_v] D[\Phi_v] \\
 * \exp[i \int L(a_m, \dot{a}_m) dt] \\
 * \delta(I_v - J_v(a_m^+, a_m)) \delta(\theta_v(a_m^+, a_m) - c_v(t)) \\
 * \det([J_v(a_m^+, a_m), \theta_v(a_m^+, a_m)]_{CP})
 \end{aligned}
 \quad (2.4)$$

con

$$\begin{aligned}
 L(a_m, \dot{a}_m) &= i \sum_m a_m^+ \dot{a}_m + \sum_v \pi_v \Phi_v - H(a_m^+, a_m) \\
 y \\
 a_m^+ &= - \frac{\partial L(a_m, \dot{a}_m)}{\partial \dot{a}_m}
 \end{aligned}
 \quad (2.5)$$

donde I_v son las componentes cartesianas del impulso angular colectivo π_v . Las funciones $J_v(a_m^+, a_m)$ representan el impulso angular total de los fermiones expresado en términos de las variables intrínsecas y, por lo tanto, el vínculo $\delta(I_v - J_v)$ asegura la conservación del impulso angular. Las cantidades $\theta_v(a_m^+, a_m)$ son funciones de las variables intrínsecas sujetas a la única condición de que ni el determinante de su corchete de Poisson $[J_v]_{CP}$ con J_v ni el corchete mismo se anulen. Este determinante se conoce con el nombre de determinante de Faddev-Popov y asegura la equivalencia entre (2.1) y (2.4) garantizando que esta última expresión no dependa de la elección de las funciones θ_v .

Las cantidades θ_v pueden elegirse como coordenadas canónicamente conjugadas a los impulsos J_v (por lo menos en primera aproximación) y entonces la condición $\delta(\theta_v(a_m^+, a_m))$

$-c_v(t))$, donde las $c_v(t)$ son curvas arbitrarias, puede visualizarse como la condición que fija el sistema de ejes fijo al cuerpo con respecto al sistema de referencia en el laboratorio: de todas las posibles trayectorias angulares θ_v se elige la trayectoria c_v . (Esta es la condición que fija el gauge en el método de Faddeev y Popov).

El camino que se sigue ahora es representar en forma exponencial los funcionales delta y el determinante que aparecen en (2.4), de tal manera que se puedan sumar a la acción definiendo un Lagrangiano efectivo. La exponenciación del vínculo $\delta(I_v - J_v)$ se efectúa escribiendo el funcional como el límite de una Gaussiana

$$\delta(I_v - J_v) = \lim_{D \rightarrow 0} \exp[-i \int (I_v - J_v)^2 / 2D \, dt] \quad (2.6a)$$

Hemos omitido la constante $(2\pi D)^{-1/2}$ (infinita en el límite $D \rightarrow 0$) que multiplica el exponencial, pues ésta puede ser absorbida en la constante de normalización N de (2.4).

La exponenciación de la condición de gauge $\delta(\theta_v - c_v)$ se lleva a cabo mediante el llamado truco de 'tHooft (ref. [18]) que consiste en utilizar el hecho de que la integral funcional (2.4) es independiente de las funciones $c_v(t)$ y por lo tanto podemos integrar con cualquier funcional de $c_v(t)$, $G(c_v)$, sin cambiar el valor de la integral (nuevamente a menos de una constante que se absorbe en N):

$$Z = \lim_{D \rightarrow 0} N \int \prod_{m,v} D[a_m^+] D[a_m] D[I_v] D[\Phi_v] D[c_v] G(c_v) \\ * \exp[i \int dt (L - \sum_v (I_v - J_v)^2 / 2D)] \quad (2.7)$$

$$* \delta(\theta_v - c_v) \det[J_v, \theta_u]_{CP}$$

de tal manera que eligiendo

$$G(c_v) = \exp[-i \int c_v^2(t)/2A dt] \quad (2.8)$$

con A arbitrario, se obtiene

$$\begin{aligned} Z = \lim_{D \rightarrow 0} N \pi \int D[a_m^+] D[a_m] D[I_v] D[\phi_v] \\ * \exp[i \int dt (L - \sum_v (I_v - J_v)^2/2D - \sum_v \theta_v^2/2A)] \\ * \det[J_v, \theta_u]_{CP} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La elección del funcional $G(c_v)$ en (2.8) obedece al hecho de que las únicas integrales funcionales de existencia garantizada son integrales de formas cuadráticas. Entonces, en un espacio finito-dimensional la función $G(c_v)$ sería completamente arbitraria, mientras que en un espacio infinito tiene que respetar las limitaciones de la integral funcional y, por lo tanto, $G(c_v)$ sólo puede ser una forma cuadrática a fin de garantizar la existencia de (2.8).

Finalmente, el determinante es exponenciado como

$$\begin{aligned} \det[J_v, \theta_u]_{CP} &= \exp[i \int U \ln(\det[J_v, \theta_u]_{CP}) dt] \\ &= \exp[i \int U \sum_n (-1)^n (\det([J_v, \theta_u]_{CP})^{-1})^{n/n} dt] \end{aligned} \quad (2.10)$$

El valor de la constante U se fijará más adelante (ver sec. 3.2). Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
Z = \lim_{D \rightarrow 0} N \prod_{m,v} \int D[a_m^+] D[a_m] D[I_v] D[\Phi_v] \\
* \exp[i \int dt (L - \sum_v (I_v - J_v)^2 / 2D - \sum_v \theta_v^2 / 2A \\
+ U \sum_n (-1)^n (\det([J_v, \theta_v]_{CP-1})^n / n)
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Debido a la equivalencia entre (2.1) y (2.4), los resultados físicos obtenidos a partir de (2.11) tienen que ser finitos en el límite $D \rightarrow 0$ e independientes del parámetro de gauge A .

Como veremos más adelante, en el nuevo sistema definido por (2.11) los modos espúreos adquieren una frecuencia $\omega_v = (AD)^{-1/2}$, o sea que se desacoplan totalmente del sistema en el límite $D \rightarrow 0$. Para el electromagnetismo en el gauge de Coulomb sucede lo mismo. Podemos decir entonces que nuestra condición de gauge que corresponde a centrar los ángulos θ_v alrededor del valor cero equivale formalmente a la condición de Coulomb $\text{div}(\vec{A})=0$ en el electromagnetismo (donde \vec{A} es el potencial vectorial). La eliminación de los grados de libertad espúreos indica, en ambos casos, que al sistema no le quedan grados de libertad no físicos. En el caso del electromagnetismo, la ley de Gauss se cumple automáticamente debido a que la condición de gauge garantiza la transversalidad de los campos de gauge \vec{A} , y por consiguiente del campo eléctrico \vec{E} , con lo cual $\text{div}(\vec{E})=0$. En nuestro caso, la conservación del impulso angular es igualmente automática en el límite $D \rightarrow 0$.

En vez de elegir para el funcional $\sigma(I_v - J_v)$ la representación (2.6a), hubiéramos podido elegir una transformada de Fourier

$$\delta(I_V - J_V) = \int D[\eta_V] \exp[i \int \eta_V(t)(I_V - J_V) dt] \quad (2.6b)$$

donde, en vez de eliminar los grados de libertad espúreos, se introduce un grado de libertad de más, η_V , por cada dirección v . Este sería el caso análogo al del gauge de Lorentz en el electromagnetismo, en el cual los fotones tienen dos grados de libertad de más (longitudinal y temporal). La ley de Gauss, que garantiza la conservación de la carga, se introduce a manera de vínculo y una métrica negativa para los estados espúreos garantiza que los observables no dependan de los grados de libertad no físicos. En la ref. [19] se sigue este procedimiento alternativo, el cual ahorra el proceso de tomar el límite $D \rightarrow 0$ que restaura la simetría rotacional. Los cálculos realizados en este contexto resultan mucho más simples no obstante el hecho de introducir un grado de libertad de más y de tener que trabajar con estados de norma negativa.

Volviendo a nuestro caso, la ec. (2.11) define un Hamiltoniano clásico efectivo para el nuevo sistema. Rigurosamente hablando, los campos a_m^+ y a_m son números- c que satisfacen un álgebra de Grassman (ver, por ejemplo, ref. [20]). Sin embargo, no necesitamos profundizar este concepto ni tener en cuenta las consecuencias que este hecho tiene en el contexto de la integral funcional, puesto que a partir de este momento nos independizamos de ella y simplemente tomamos el Hamiltoniano efectivo clásico, reemplazamos los campos a_m^+ y a_m por operadores de creación y destrucción fermiónicos, las funciones θ_V por operadores microscópicos a determinar y los impulsos angulares J_V por los correspondientes operadores de impulso

angular total microscópicos. El corchete de Poisson lo reemplazamos por el conmutador $i[J_v, \theta_v]$ (a través de todo el desarrollo hemos tomado $\hbar=1$) y, finalmente, los I_v son reemplazados por las componentes del operador impulso angular colectivo. El Hamiltoniano efectivo con el que trabajaremos

$$H' = \lim_{D \rightarrow 0} H + \sum_v (I_v - J_v)^2 / 2D + \sum_v \theta_v^2 / 2A - U \sum_n (-1)^n (\det(i[J_v, \theta_v] - 1))^{n/n} \quad (2.12)$$

incluye explícitamente grados de libertad fermiónicos y colectivos y actúa sobre funciones de onda en el correspondiente espacio producto

$$\psi_{\alpha, IM}(a_m^+, a_m, \Omega) = \phi_{\alpha}(a_m^+, a_m) \varphi_{\alpha, IM}(\Omega) \quad (2.13)$$

donde α representa todos los números cuánticos intrínsecos, I es el impulso angular total del sistema y M su proyección en el eje z del sistema del laboratorio. ϕ_{α} es la función de onda que representa los distintos estados intrínsecos del sistema y $\varphi_{\alpha, IM}$ es la función de onda que describe las rotaciones del cuerpo (Ω denota ahora los tres ángulos de Euler). Esta puede escribirse en forma general en términos de las matrices de rotación $D_{MK}^I(\Omega)$, donde K es la proyección del impulso angular total I sobre el eje 3 del sistema fijo al cuerpo, como (ref. [21])

$$\varphi_{\alpha, IM}(\Omega) = ((2I+1)/8\pi^2)^{1/2} \sum_K f_{\alpha, IK} D_{MK}^I(\Omega) \quad (2.14)$$

Los coeficientes $f_{\alpha,IK}$ dependerán de la magnitud relativa de los momentos de inercia del sistema. En el caso en el que el sistema posea simetría axial, K es un buen número cuántico determinado por la estructura intrínseca y la sumatoria sobre K desaparece.

III. APLICACION DEL METODO AL CALCULO PERTURBATIVO DE LOS PARAMETROS INERCIALES DE UN NUCLEO DEFORMADO

3.1 Rompimiento de la simetría esférica: definición y propiedades de la base deformada.

Suponemos que el Hamiltoniano H que describe un núcleo deformado está expresado en la base esférica del modelo de capas $(| \alpha \rangle) = (| n l j m t m_t \rangle)$, donde n y l son los números cuánticos radial y angular del oscilador armónico, j el impulso angular total ($j=l+s$) m su proyección. t y m_t indican el isospin del orbital ($t=1/2$) y su correspondiente proyección ($m_t=1/2$ para neutrones y $m_t=-1/2$ para protones). Entonces tenemos, usando el lenguaje de segunda cuantificación y simbolizando con letras griegas los orbitales esféricos:

$$H = h_0 + V = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \beta \gamma \delta} \langle \alpha \beta | V | \gamma \delta \rangle c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}^{\dagger} c_{\delta} c_{\gamma} \quad (3.1)$$

donde h_0 es el operador que representa la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas más un potencial de un cuerpo que representa la interacción de las partículas con un carozo inerte y V es el operador de dos cuerpos que representa la interacción efectiva entre pares de partículas. Ambos operadores, h_0 y V son esféricos (conmutan con el operador impulso angular total \hat{J}); por lo tanto, h_0 es diagonal en esta base y tiene autovalores ϵ_{α} .

Nuestro sistema escrito en esta representación no es apto para un tratamiento en teoría de perturbaciones, pues debido a la importancia de la interacción de dos cuerpos, las funciones de onda del sistema construídas a partir de productos de funciones de onda de partícula independiente en la base esférica $c^+_{\alpha}c^+_{\beta}...|0\rangle$ no proveen una descripción de orden cero lo suficientemente buena. Es indudable que para ello es necesario incluir en la descripción de orden cero parte de las importantes correlaciones entre las partículas que hacen que el sistema posea una deformación estable. Ahora bien, la determinación autoconsistente de un conjunto de funciones de onda de partícula independiente define para cada partícula un pozo de potencial no esférico H_0 (Hamiltoniano de Nilsson) generado por la acción de las partículas restantes y por lo tanto incluirá una parte importante de las correlaciones que acabamos de mencionar. Si escribimos entonces

$$H=H_0+H_{res} \quad (3.2)$$

es de esperar que la interacción residual H_{res} sea lo suficientemente pequeña como para ser tratada perturbativamente. Sin embargo, el precio que debemos pagar al dividir H como en (3.2) es el de perder en la descripción de Nilsson la simetría esférica del problema original. Es decir, tenemos que $[H_0, \vec{J}] \neq 0$ y $[H_{res}, \vec{J}] \neq 0$ a pesar de que $[H, \vec{J}] = 0$.

Si diagonalizamos el Hamiltoniano de Nilsson H_0 , sus autofunciones (que simbolizaremos mediante letras latinas) conforman lo que se denomina una base deformada (j ya no es un buen número cuántico) y pueden escribirse como combinación

lineal de las funciones de onda esféricas:

$$|k\rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha | k \rangle | \alpha \rangle \quad (3.3)$$

Nos restringiremos al estudio de los núcleos par-par y en adelante supondremos que H_0 es invariante frente a rotaciones en el espacio de isospín, es decir que no conecta estados deformados con diferente proyección de isospín y por lo tanto los orbitales de protones y de neutrones son ortogonales y degenerados (V no incluye la interacción Coulombiana). Supondremos además que H_0 tiene simetría elipsoidal, es decir, que el campo deformado es simétrico con respecto a reflexión sobre los planos (x,y) , (y,z) , (x,z) . Esto significa que las soluciones deformadas (3.3) tienen la propiedad de que todas sus componentes tienen $k+m+1/2$ par (ó impar). Llamaremos $\{B\}$ al conjunto de estados deformados en (3.3) que puede expresarse como combinación lineal de estados $| \alpha \rangle = | j, m \rangle$ (todos los demás números cuánticos se sobreentienden) con $m = j, j-2, \dots, 1-j$. Cada uno de estos orbitales es ortogonal a la órbita

$$|k\rangle = \sum_{\bar{\alpha}} \langle \bar{\alpha} | k \rangle | \bar{\alpha} \rangle = \sum_{\bar{\alpha}} (-1)^{k+j-m} \langle \alpha | k \rangle | \bar{\alpha} \rangle \quad (3.4)$$

donde $| \bar{\alpha} \rangle = | j, m \rangle$ con $m = j-1, j-2, \dots, -j$. Además de ser ortogonales, $|k\rangle$ y $| \bar{k} \rangle$ tienen la misma energía. El conjunto formado por los estados (3.4) lo denominaremos $\{\bar{B}\}$. Los estados pertenecientes a $\{B\}$ tienen la propiedad de no conectarse mediante el operador $Y_{2\mu}$ con aquellos que pertenecen a $\{\bar{B}\}$. Debido al hecho de que los coeficientes $\langle \alpha | k \rangle$ son reales, la ec. (3.4) implica que las órbitas con simetría elipsoidal son también simétricas frente a

inversión temporal.

Tomando en cuenta la existencia de los cuatro conjuntos de soluciones deformadas degeneradas entre sí : $\{B\}$ y $\{\bar{B}\}$ para protones, $\{B\}$ y $\{\bar{B}\}$ para neutrones; y dado el hecho de que estamos estudiando un sistema con el mismo número par de protones y de neutrones fuera de capa cerrada, entonces si h es un orbital de protón ocupado, $h\epsilon\{B\}$, el orbital de protón $h\epsilon\{\bar{B}\}$ también estará ocupado, así como los orbitales $h\epsilon\{B\}$ y $h\epsilon\{\bar{B}\}$ correspondientes a neutrones. Designando con h los orbitales ocupados (agujeros) y con p los orbitales libres (partículas) podemos formar cuatro tipos diferentes de operadores de creación de un par partícula-agujero que pueden ser representados mediante las combinaciones $(c_p^+ c_{\bar{h}} + c_{\bar{p}}^+ c_h)$, $(c_p^+ c_{\bar{h}} - c_{\bar{p}}^+ c_h)$, $(c_p^+ c_h - c_{\bar{p}}^+ c_{\bar{h}})$ y $(c_p^+ c_h + c_{\bar{p}}^+ c_{\bar{h}})$, donde los estados $|p\rangle$ y $|h\rangle$ pertenecen al conjunto $\{B\}$ para protones y para neutrones. Como se muestra en el apéndice A, las componentes $v=x,y,z$ partícula-agujero (ph) del operador impulso angular total J_v pueden ser expresadas en términos de pares de los primeros tres tipos (acoplados a isospín total cero), mientras que los pares del cuarto tipo corresponderán a las vibraciones físicas (vibraciones β y γ). Para distinguir estos modos usaremos la letra $s=v,a$ con $v=x,y,z$. Definimos entonces los operadores de creación de pares partícula-agujero acoplados a isospín total T y proyección M

$$G_{ph}^+(x,T,M) = (1/2)^{1/2} \{ (c_p^+ c_{\bar{h}})_{TM} + (c_{\bar{p}}^+ c_h)_{TM} \}$$

$$G_{ph}^+(y,T,M) = (1/2)^{1/2} \{ (c_p^+ c_{\bar{h}})_{TM} - (c_{\bar{p}}^+ c_h)_{TM} \}$$

(3.5)

$$G_{ph}^+(z, T, M) = (1/2)^{1/2} \{ (c_p^+ c_h)_{TM} + (c_{\bar{p}}^+ c_{\bar{h}})_{TM} \}$$

$$G_{ph}^+(a, T, M) = (1/2)^{1/2} \{ (c_p^+ c_h)_{TM} - (c_{\bar{p}}^+ c_{\bar{h}})_{TM} \}$$

3.2 RPA en la base deformada

La separación $H = H_0 + H_{res}$ que acabamos de obtener tiene la propiedad que ni H_0 ni H_{res} conmutan con el operador impulso angular total \vec{J} . Nos encontramos pues ante un rompimiento de la simetría esférica del problema, de tal manera que si queremos aproximarnos perturbativamente a las soluciones exactas del problema partiendo del sistema de Nilsson H_0 , necesitamos deshacernos de los modos espúreos asociados con las rotaciones del sistema como un todo. Para ello seguimos el método descrito en el cap. 2 y tratamos el sistema equivalente definido por H' (ec. (2.12)).

Sin embargo, no es posible pensar en una expansión perturbativa en la que el parámetro de expansión sea la intensidad de la interacción de dos cuerpos, ya que ésta contiene términos que divergen en el límite $D \rightarrow 0$. Necesitamos entonces un procedimiento que nos permita clasificar los operadores de acuerdo a la magnitud de algún otro parámetro. Este procedimiento bien puede ser la RPA (aproximación de fases al azar) que, como veremos más adelante, además de proveer un esquema de clasificación de los operadores en términos de su magnitud relativa a un parámetro de expansión relacionado con la deformación del sistema, permite mejorar la descripción de orden cero incluyendo en ella una parte importante de la interacción residual.

La RPA es un método que permite linealizar el Hamiltoniano de un problema de muchos cuerpos aproximándolo mediante un Hamiltoniano que representa un conjunto de osciladores acoplados, los cuales son desacoplados mediante una transformación canónica apropiada. Originalmente esta aproximación fue introducida por Bohm y Pines (ref. [22]) en la teoría de oscilaciones de plasma y desde entonces es un método muy usado en el tratamiento de sistemas finitos. En el caso de sistemas deformados, la RPA tiene además la ventaja de restaurar parcialmente la simetría separando los modos espúreos del resto de las excitaciones del sistema (ver, por ejemplo, ref. [23]).

La imagen clásica de la RPA es la de una aproximación de pequeñas oscilaciones en torno a un mínimo de la superficie de potencial dada por H_0 . El problema puede ser reducido a un problema armónico donde se determinan los modos normales de vibración del sistema. Las coordenadas generalizadas del problema original pueden expresarse como combinación lineal de las coordenadas normales.

Los operadores $\gamma_{ph}^+(s,T,M)$ que crean un bosón partícula-agujero están en correspondencia biunívoca con los operadores fermiónicos de creación de pares partícula-agujero $G_{ph}^+(s,T,M)$ definidos mediante la ec. (3.5) y satisfacen reglas de conmutación bosónicas

$$[\gamma_{ph}(s,T,M), \gamma_{p'h'}^+(s',T',M')] = \delta_{pp'} \delta_{hh'} \delta_{ss'} \delta_{TT'} \delta_{MM'} \quad (3.6)$$

Como se muestra en el apéndice C, el Hamiltoniano en la aproximación RPA puede escribirse como

$$H_{RPA} = (H_0 + H_{res})_{RPA} =$$

$$(1/2) \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} \sum_T \{ H_f^T(s; ph|s; p'h') \sum_M \gamma_{ph}^+(s, T, M) \gamma_{p'h'}(s, T, M) + H_b^T(s, ph|s, p'h') \sum_M (-1)^{T-M} \gamma_{ph}^+(s, T, M) \gamma_{p'h'}^+(s, T, -M) + h.c. \} \quad (3.7)$$

donde los vértices "forward" y "backward" $H_f^T(s, ph|s, p'h')$ y $H_b^T(s, ph|s, p'h')$ están dados en términos de los elementos de matriz del Hamiltoniano original. En la matriz H_f^T están sumadas tanto la parte correspondiente al término de dos cuerpos H_{res} como la contribución diagonal $(E_p - E_h) \delta_{pp'} \delta_{hh'}$ proveniente de H_0 (ver tabla C.1).

H_{RPA} representa un conjunto de osciladores armónicos acoplados que pueden desacoplarse mediante la transformación a modos normales (transformación de Bogoliubov)

$$\Gamma_n^+(s, T, M) = \sum_{ph} [\lambda(n, ph; s, T) \gamma_{ph}^+(s, T, M) - (-1)^{T-M} \mu(n, ph; s, T) \gamma_{ph}(s, T, -M)] \quad (3.8)$$

de tal manera que se cumple

$$H_{RPA} = \sum_n \sum_s \sum_T \hat{T} w_n(s, T) [\Gamma_n^+(s, T) \Gamma_n(s, T)]_0 \quad (3.9)$$

Tanto las amplitudes λ y μ en (3.8) como las frecuencias w en (3.9) se determinan unívocamente mediante las condiciones

$$[H_{RPA}, \Gamma_n^+(s, T, M)] = w_n(s, T) \Gamma_n^+(s, T, M) \quad (3.10)$$

y

$$[\Gamma_n(s, T, M), \Gamma_{n'}^+(s', T', M')] = \delta_{nn'} \delta_{ss'} \delta_{TT'} \delta_{MM'} \quad (3.11)$$

La ecuación (3.10) conduce a la llamada ecuación de autovalores de la RPA que escribimos como

$$\begin{pmatrix} H_f^T(s) & H_b^T(s) \\ -H_b^T(s) & -H_f^T(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n(s,T) \\ \mu_n(s,T) \end{pmatrix} = w_n(s,T) \begin{pmatrix} \lambda_n(s,T) \\ \mu_n(s,T) \end{pmatrix} \quad (3.10a)$$

donde $H_f^T(s)$ representa la matriz con elementos $(H_f^T(s))_{ph,p'h'} = H_f^T(s, ph|s, p'h')$ (lo mismo vale para $H_b^T(s)$). A su vez, $\lambda_n(s,T)$ es el vector con componentes $(\lambda_n(s,T))_{ph} = \lambda(n, ph; s, T)$ y lo mismo vale para $\mu_n(s,T)$.

La condición (3.11) provee las condiciones de ortonormalización (dentro de la métrica de la RPA) para los autoestados $\begin{pmatrix} \lambda_n(s,T) \\ \mu_n(s,T) \end{pmatrix}$

$$(\lambda_n(s,T) \mu_n(s,T)) \begin{pmatrix} \lambda_{n'}(s',T') \\ -\mu_{n'}(s',T') \end{pmatrix} = \delta_{nn'} \delta_{ss'} \delta_{TT'} \quad (3.11a)$$

Nótese que como consecuencia de la isoescalaridad del Hamiltoniano, las matrices H_f y H_b no dependen de la proyección M del isospín. Por lo tanto, ni las amplitudes λ y μ ni las frecuencias w dependen de ella. Partiendo del hecho de que las matrices H_f y H_b son reales, podemos también suponer (sin perder generalidad) que las amplitudes λ y μ también lo son. Sin embargo, debido al hecho de que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} H_f^T(s) & H_b^T(s) \\ -H_b^T(s) & -H_f^T(s) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

es antihermítica, sus autovalores no necesariamente son reales. Thouless (ref. [24]) demuestra que si las pequeñas oscilaciones

de la RPA se realizan en torno a un mínimo de la superficie de potencial (es decir, en torno a un punto de equilibrio estable) entonces la matriz

$$M' = \begin{pmatrix} H_b^T(s) & H_f^T(s) \\ H_f^T(s) & H_b^T(s) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

es definida positiva. Esta es condición suficiente para que los autovalores de M sean reales. La matriz M' es la matriz de equilibrio del problema de Hartree-Fock. Si M' es definida positiva las soluciones autoconsistentes son estables. Supondremos que nuestra base deformada $\{B\}U(\bar{B})$ corresponde a soluciones Hartree-Fock estables y por lo tanto las frecuencias RPA son reales.

Ahora bien, el hecho de que el Hamiltoniano original sea esférico implica que H_{RPA} también lo es, pues a nivel RPA las simetrías del problema se conservan. Es decir, H_{RPA} conmuta con las componentes partícula-agujero (componentes RPA) del impulso angular:

$$[H_{RPA}, (J_v)_{RPA}] = 0 \quad v=x,y,z \quad (3.14)$$

Entonces, comparando (3.14) con (3.10), vemos que $(J_v)_{RPA}$ es una solución espúrea (modo de frecuencia cero) de las ecuaciones de la RPA y corresponde a las rotaciones del sistema como un todo alrededor del eje v . Es importante notar que la condición para que esto ocurra es que $[H_0, J_v] \neq 0$, pues sólo así las componentes partícula-agujero (o al menos algunas de ellas) de J_v son diferentes de cero.

En la ecuación (3.9) tenemos por lo tanto tres modos

isoescalares (J_v es isoescalar) espúreos a los que asociaremos el índice $n=0$. Puesto que J_v es un operador Hermítico, estos modos no son normalizables en el sentido de (3.11). Es decir, no es posible definir operadores $\Gamma_0^+(v, T=0)$, $\Gamma_0(v, T=0)$ que cumplan la condición (3.11). Todos los demás modos, a saber ($n \neq 0, v, T=0$), ($n, v, T=1$) y (n, a, T), son finitos, normalizables y corresponden a excitaciones intrínsecas (vibraciones físicas) del sistema.

Debido al hecho de que $[(J_v)_{RPA}, (J_w)_{RPA}] = 0$ para todo v, w (ver apéndice B), entonces se cumple que

$$[\sum_w (J_w)_{RPA}^2 / 2\beta_w, (J_v)_{RPA}] = 0 \quad v=x, y, z \quad (3.15)$$

independientemente del valor que asuman los coeficientes β_w . Esto quiere decir que podemos escribir

$$H_{RPA} = \sum_w (J_w)_{RPA}^2 / 2\beta_w + \sum_n' \sum_s \sum_T w_n(s, T) (\Gamma_n^+(s, T) \Gamma_n(s, T))_0 \quad (3.16)$$

La sumatoria primada sobre n indica (en (3.16) y de ahora en adelante) que se excluyen las raíces espúreas. Estas son tenidas en cuenta mediante el primer sumando en el lado derecho de (3.17). Los coeficientes β_w son (por ahora) arbitrarios excepto por el hecho de que no deben anularse. Obsérvese que en vez del sumando $(J_w)_{RPA}^2 / 2\beta_w$ en (3.17) hubiéramos podido escribir un término proporcional a $(J_w)_{RPA}^n$, con n par debido a la simetría frente a inversión temporal; sin embargo, como veremos en la sec. 3.3, el término cuadrático corresponde al orden más bajo en el parámetro de expansión, de tal forma que es este el único

término que nos interesa conservar.

La ec. (3.16) muestra claramente que la solución espúrea $(J_v)_{RPA}$ corresponde a oscilaciones sin fuerza de restitución en la dirección v , ó, lo que es lo mismo, a rotaciones del sistema como un todo alrededor del eje v . El parámetro J_v representa el momento de inercia del sistema con respecto a rotaciones alrededor del eje v . El operador ángulo, $(\theta_v)_{RPA}$, canónicamente conjugado al impulso angular obedecerá la ecuación de movimiento

$$[H_{RPA} , (\theta_v)_{RPA}] = -i(J_v)_{RPA}/J_v \quad (3.17)$$

y cumplirá la condición de canonicidad

$$[(\theta_v)_{RPA} , (J_w)_{RPA}] = i\delta_{vw} \quad (3.18)$$

Las ecuaciones (3.17) y (3.18) definen unívocamente los elementos de matriz partícula-agujero de los ángulos $(\theta_v)_{RPA}$ y los parámetros J_v que se conocen con el nombre de momentos de inercia de Thouless-Valatin (ref. [3]). Para determinar estas cantidades escribimos (3.17) y (3.18) en forma matricial análoga a (3.10a) y (3.11a):

$$\begin{pmatrix} H_f^0(v) & H_b^0(v) \\ -H_b^0(v) & -H_f^0(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_v \\ -\theta_v^* \end{pmatrix} = -i/J_v \begin{pmatrix} J_v \\ J_v^* \end{pmatrix} \quad (3.17a)$$

$$\begin{pmatrix} \theta_v^* & \theta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_w \\ -J_w^* \end{pmatrix} = i\delta_{vw} \quad (3.18a)$$

donde θ_v y J_v son los vectores con componentes $\theta_v(ph)$ y $J_v(ph)$ (ver apéndice A). Como $(J_v)_{RPA}$ es un operador Hermítico, resulta que si J_v tiene elementos de matriz reales, los de θ_v son imaginarios puros (y viceversa). Si escribimos entonces $\theta_v^* = k\theta_v$ y $J_v^* = -kJ_v$ con $k=\pm 1$, obtenemos de (3.17a)

$$\theta_v = -i/3_v (H_f^0(v) - k H_b^0(v))^{-1} J_v \quad (3.19)$$

o sea

$$\theta_v(ph) = -i/3_v \sum_{p'h'} (H_f^0(v) - k H_b^0(v))^{-1}_{ph,p'h'} J_v(p'h') \quad (3.20)$$

Multiplicando (3.19) por la izquierda con J_w y usando (3.18a) obtenemos para los momentos de inercia de Thouless-Valatin

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_v &= -2kJ_v (H_f^0(v) - k H_b^0(v))^{-1} J_v \quad (3.21) \\ &= -2k \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} J_v(ph) (H_f^0(v) - k H_b^0(v))^{-1}_{ph,p'h'} J_v(p'h') \end{aligned}$$

Vemos que si no tenemos en cuenta la interacción residual, $(H_b^0(v) - k H_f^0(v))^{-1} = (E_p - E_h)^{-1} \sigma_{pp'} \sigma_{hh'}$, donde E_p y E_h son las energías de las órbitas deformadas correspondientes. (3.21) se reduce entonces a la fórmula de Inglis para los momentos de inercia

$$\mathcal{J}_v = (\mathcal{J}_v)_{\text{crank}} = 2 \sum_{ph} J_v^{*(ph)} J_v(ph) / (E_p - E_h) \quad (3.22)$$

Clásicamente, en el caso en el que el mínimo de la

superficie de potencial alrededor del cual quieren hacerse las pequeñas oscilaciones corresponda a un valle, el sistema podrá desplazarse en la dirección del valle sin que cambie la energía potencial (tendremos en esa dirección una configuración de equilibrio indiferente). No habrá entonces fuerza de restitución para el movimiento en la dirección del valle y por lo tanto el modo normal correspondiente tendrá frecuencia nula. Este es el caso cuando el sistema se traslada rígidamente o cuando efectúa rotaciones rígidas alrededor de algún eje. Como estas frecuencias cero no influyen en las demás frecuencias, pues corresponden a grados de libertad espúreos, es posible eliminarlas planteando el problema con un vínculo que reduzca el número de grados de libertad del problema, es decir, que impida las traslaciones y rotaciones rígidas del sistema. Precisamente esto es lo que hace el método presentado en el capítulo anterior, pues mediante el término $\sum_v \theta_v^2/2A$ en el Hamiltoniano H' (ec. (2.12)) se reduce el número de grados de libertad del sistema al número de grados de libertad intrínsecos. Como se mencionó en ese momento, los operadores θ_v requeridos por el método son arbitrarios excepto por el hecho de que no deben conmutar con los operadores J_v . Es válido entonces definir las componentes partícula-agujero de estos operadores mediante la ecuación (3.20) con los parámetros inerciales dados por (3.21). De esta manera podemos interpretar $\sum_v \theta_v^2/2A$ como el potencial proveniente de una fuerza de restitución en cada dirección v y que, por lo tanto, impide la rotación del sistema como un todo alrededor de cada eje v .

Como veremos más adelante (ver sección 3.4), es conveniente añadirle al Hamiltoniano H' de la ec. (2.12) el

término

$$\sum_v (I_v^2 - J_v^2) / 2J_v \quad (3.23)$$

que es idénticamente cero en el límite $D \rightarrow 0$ independientemente del valor de J_v , ya que en este límite el término $\sum_v (I_v - J_v)^2 / 2D$ da una contribución finita.

En adelante trabajaremos con el Hamiltoniano

$$H'' = \lim_{D \rightarrow 0} (H_{intr} + H_{rot} + H_{coup}) \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{intr} &= H - \sum_v J_v^2 / 2J_v + \sum_v J_v^2 / 2D + \sum_v \theta_v^2 / 2A + H_{det} \\ H_{rot} &= \sum_v I_v^2 / 2D + \sum_v I_v^2 / 2J_v \\ H_{coup} &= - \sum_v I_v J_v / D \\ H_{det} &= -U \sum_n (-1)^n (\det(i[J_v, \theta_v] - 1))^n / n \end{aligned} \quad (3.25)$$

En H_{intr} sólo tenemos grados de libertad fermiónicos, en H_{rot} tenemos sólo grados de libertad colectivos y H_{coup} es el término que acopla ambos grados de libertad. En adelante supondremos D finita y el límite $D \rightarrow 0$ lo tomaremos apenas en las expresiones finales.

Debido al hecho de que $(J_v)_{RPA}$ y $(\theta_v)_{RPA}$ cumplen (3.18), se tiene que el término H_{det} de (3.25) cumple $(H_{det})_{RPA} = 0$, entonces, haciendo uso de la ecuación (3.16) podemos escribir

$$(H_{intr})_{RPA} = \left(\sum_v J_v^2 / 2D + \sum_v \theta_v^2 / 2A \right)_{RPA} + \quad (3.26)$$

$$+ \sum_n' \sum_s \sum_T \hat{T} w_n(s,T) [\Gamma_n^+(s,T) \Gamma_n(s,T)]_0$$

de donde inmediatamente podemos ver que con los operadores $(\theta_v)_{\text{RPA}}$ definidos mediante (3.20) y (3.21), $(J_v)_{\text{RPA}}$ sigue siendo solución a las ecuaciones de la RPA para (H_{intr}) pero ya no con frecuencia cero sino con frecuencia $w_0 = w_0(v, T=0) = (AD)^{-1/2}$, puesto que el término entre paréntesis en el lado derecho de (3.26) representa tres osciladores armónicos de masa D y constante de restitución A. Estos modos, a los que continuaremos llamando espúreos, se desacoplan totalmente del espectro en el límite $D \rightarrow 0$. $(H_{\text{intr}})_{\text{RPA}}$ puede ser escrito entonces como

$$\begin{aligned} (H_{\text{intr}})_{\text{RPA}} = & w_0 \sum_v \Gamma_0^+(v) \Gamma_0(v) \\ & + \sum_n' \sum_s \sum_T w_n(s,T) [\Gamma_n^+(s,T) \Gamma_n(s,T)]_0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$\Gamma_0^+(v)$ ($=\Gamma_0^+(v, T=0)$) y $\Gamma_0(v)$ ($=\Gamma_0(v, T=0)$) son los operadores de creación y destrucción de los nuevos modos espúreos y pueden ser expresados en términos de los operadores posición e impulso angular correspondientes como

$$\begin{aligned} \Gamma_0^+(v) = & (i)^v [(2Dw_0)^{1/2} (\theta_v)_{\text{RPA}} - i(2/Dw_0)^{1/2} (J_v)_{\text{RPA}}] \\ \Gamma_0(v) = & (-i)^v [(2Dw_0)^{1/2} (\theta_v)_{\text{RPA}} + i(2/Dw_0)^{1/2} (J_v)_{\text{RPA}}] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Obsérvese que para $w_0=0$ y D finito esta representación no es posible. Las fases $(i)^v$ y $(-i)^v$ fueron introducidas para obtener amplitudes $\lambda(n=0, \text{ph}; v, T=0)$ y $\mu(n=0, \text{ph}; v, T=0)$ reales. Al reemplazar en (3.28) $(\theta_v)_{\text{RPA}}$ y $(J_v)_{\text{RPA}}$ por las expresiones en

términos de sus elementos de matriz (ec. (C.11)) y comparar con (3.8) resulta

$$\lambda(n=0,ph;v,T=0) = -i(i)^v (2/w_0)^{\hbar} (D^{-\hbar} J_v(ph) + iA^{-\hbar} \theta_v(ph)) \quad (3.29)$$

$$\mu(n=0,ph;v,T=0) = -i(-i)^v (2/w_0)^{\hbar} (D^{-\hbar} J_v(ph) - iA^{-\hbar} \theta_v(ph))$$

Es conveniente invertir (3.28) para expresar $(J_v)_{RPA}$ y $(\theta_v)_{RPA}$ en términos de los operadores de creación y destrucción de los modos espúreos:

$$(J_v)_{RPA} = i(-i)^v (Dw_0/2)^{\hbar} [\Gamma_0^+(v) - (-1)^v \Gamma_0(v)] \quad (3.30a)$$

$$(\theta_v)_{RPA} = (-i)^v (2Dw_0)^{-\hbar} [\Gamma_0^+(v) + (-1)^v \Gamma_0(v)] \quad (3.30b)$$

3.3 Consideraciones sobre la expansión perturbativa

Una vez eliminados los modos de frecuencia cero, es posible tratar perturbativamente el Hamiltoniano H'' (ec. (3.24)). Sin embargo, como mencionamos en la sección anterior, no es posible realizar una expansión perturbativa en la que el parámetro de expansión sea la intensidad de la interacción de dos cuerpos, puesto que ésta contiene términos divergentes en el límite $D \rightarrow 0$.

En el caso del modelo de Elliott tratado en las refs. [10] y [12c], se usó la RPA como procedimiento para incluir una fracción importante de la interacción residual en la descripción de orden cero y se hizo la expansión perturbativa alrededor de

las soluciones RPA. El parámetro de expansión Q^{-1} fue tomado como el inverso del mayor de los momentos cuadrupolares del sistema puesto que éstos son proporcionales al valor esperado $\langle J_V^2 \rangle$ de las componentes del cuadrado del impulso angular total y estos valores son, a su vez, las cantidades "grandes" en un sistema bien deformado. En el caso $SU(3)$, $\langle J_V^2 \rangle = (-1)^{V+1} \langle Q_V \rangle / 2(3)^{1/2}$, donde $\langle Q_V \rangle$ es el valor esperado en el vacío de las componentes diagonales, Q_V , del operador momento cuadrupolar

El caso general que nos concierne trata también con un sistema bien deformado y, por lo tanto, podemos suponer que los valores $\langle J_V^2 \rangle$ son cantidades grandes a las que formalmente asociaremos el orden Q . De esta manera es lícito pensar en una expansión en potencias de Q^{-1} cuyo orden cero sea la solución RPA que acabamos de obtener. Para el cálculo de las correcciones a los parámetros rotacionales del sistema, partiremos entonces de los momentos de inercia de Thoules-Valatin y calcularemos la corrección de primer orden.

La RPA privilegia, en cualquier operador de un cuerpo P , el término P_{ph} ($=P_{RPA}$) que crea o destruye pares partícula-agujero frente a los términos de dispersión P_s que crean o destruyen un par de partículas o un par de agujeros. Entonces, sabiendo que al valor esperado $\langle J_V^2 \rangle$ sólo contribuyen los términos $(J_V)_{ph}$, podemos decir que $(J_V)_{ph}$ es de orden $O(Q^1)$, mientras que el término de dispersión $(J_V)_s$ es más pequeño, es decir a lo sumo será de orden $O(Q^0)$.

Las componentes partícula-agujero de los operadores angulares θ_V definidos en la sección anterior son de orden $O(Q^{-1/2})$ como resulta de la ec (3.18). Para satisfacer (3.17),

H_{RPA} debe ser de orden $O(Q)$ si queremos que los momentos de inercia de Thouless-Valatin sean de orden $O(Q^0)$. Las correcciones a los momentos de inercia que calcularemos en las secciones siguientes serán de orden $O(Q^{-1})$.

Las componentes de dispersión $(\theta_v)_s$ de los operadores angulares permanecen aún sin determinar. La elección $(\theta_v)_s=0$ es válida, ya que con los operadores $(\theta_v)_{ph}$ definidos mediante (3.17) y (3.18) se satisface la única condición que el método impone sobre los operadores θ_v , a saber, que θ_v y J_v no conmuten. Cualquier otra elección de $(\theta_v)_s$ sería entonces aceptable, y habiéramos podido incluir en ella términos de uno y más cuerpos tal como se hace en [12c] y [10] para el caso del modelo de Elliott en dos y tres dimensiones. Como veremos, en ambos casos, las componentes $(\theta_v)_{ph}$ satisfacen (3.17) y (3.18).

En el primer caso, los operadores angulares θ_v se eligen como exactamente canónicamente conjugados a los impulsos angulares J_v ((3.18) se satisface entonces automáticamente). En este caso H_{det} (ec. (3.25)) es idénticamente cero, pero el precio que hay que pagar para ello es una expresión muy complicada (con términos hasta de cuatro cuerpos) para el potencial de restitución $\sum_v \theta_v^2/2A$.

En el caso del modelo de Elliott en tres dimensiones, los ángulos θ_v se eligen proporcionales a las componentes no diagonales, S_v , del operador cuadrupolar. Los momentos cuadrupolares Q_β , Q_γ ($Q_\beta = (Q_x - Q_y)/(2\sqrt{3})$, $Q_\gamma = -\frac{1}{2}Q_z = \frac{1}{2}(Q_x + Q_y)$) y S_v junto con los impulsos angulares J_v componen los ocho generadores del grupo $SU(3)$ y se cumple que

$$[J_v, S_w] = -i \langle Q_v \rangle \delta_{vw} + i S_{v+2} \delta_{w, v+1} - i S_{v+1} \delta_{w, v+2}$$

Entonces con $\theta_v = S_v / \langle Q_v \rangle$ (3.18) se satisface, pero $(\theta_v)_s \neq 0$.

Debido a la estructura particular del Hamiltoniano cuadrupolar ($H = -1/36 \sum_v Q_v^2 / \beta_v - 1/6 \sum_v S_v^2 / \beta_v$), en ambos casos $H = \sum_v J_v^2 / 2\beta_v$ es un operador de Casimir del grupo subyacente y, por lo tanto, conmuta con todos los generadores del grupo. En particular se cumple

$$[H = \sum_v J_v^2 / 2\beta_v, \theta_v] = 0 \quad (3.31)$$

La condición (3.17) es un caso particular de esta ecuación.

Volviendo a nuestro caso general, podemos establecer, de acuerdo con la expansión alrededor de la RPA que acabamos de propener, el orden de magnitud de todos los términos que aparecen en el Hamiltoniano H'' (ec. (3.24)).

Siendo H de orden Q y β_v de orden cero como mencionamos recientemente, la ec. (3.36) requiere que $(J_v^2 / 2D + \theta_v^2 / 2A)_{RPA}$ (y por consiguiente w_0) sea también de orden Q . Por lo tanto, los parámetros D y A deben ser de orden $O(Q^0)$ y $O(Q^2)$ respectivamente.

La expresión exacta para el conmutador entre θ_v y J_v la escribimos como

$$[\theta_v, J_w] = i\delta_{vw} + iK_{vw} \quad (3.32)$$

Esta igualdad define el operador de un cuerpo K_{vw} (ver apéndice B) y sus componentes partícula-agujero son de orden $O(Q^{-1/2})$. Reemplazando (3.32) en la expresión (3.25), obtenemos para H_{det}

$$H_{\text{det}} = -(\omega_0/2) \sum_v (K_{vv} - K_{vv}^2/2 - K_{v+1,v+2}K_{v+2,v+1}) \quad (3.33)$$

Tanto en esta expresión como de ahora en adelante, la notación $v+m$ ha de entenderse cíclicamente. Por ejemplo, $v+1=x=1$ para $v=z=3$. El primer término en H_{det} es de orden $O(Q^{\frac{1}{2}})$ y los dos siguientes de orden $O(Q^0)$. Despreciamos términos de orden inferior ya que éstos no intervienen en el cálculo de las correcciones de orden Q^{-1} a los parámetros inerciales.

Finalmente, para valores lo suficientemente pequeños del impulso angular colectivo I , éste puede considerarse de orden $O(Q^0)$ y, por lo tanto, los términos H_{rot} y H_{coup} de (3.25) son de orden $O(Q^0)$ y $O(Q^{\frac{1}{2}})$ respectivamente.

El término H_{coup} continúa siendo muy "grande" para ser tratado en teoría de perturbaciones, esta vez no por ser divergente sino porque genera (desde el punto de vista de la expansión en potencias de Q^{-1}) correcciones a la energía rotacional del sistema que resultan de orden $O(Q^0)$, es decir del mismo orden que la energía rotacional de Thouless-Valatin. Estas correcciones provienen del tratamiento a segundo orden en teoría de perturbaciones de H_{coup} :

$$\left. \begin{matrix} * \\ (n=0, v) \\ * \end{matrix} \right\} = \frac{I_v^2 \langle 0 | (J_v)_{\text{RPA}} / D | n=0, v \rangle \langle n=0, v | (J_v)_{\text{RPA}} / D | 0 \rangle}{-\omega_0} \quad (3.34)$$

Este hecho no sólo complica la expansión perturbativa sino que hace lenta su convergencia. Por lo tanto es conveniente efectuar (como en [10]) una transformación canónica que elimine este término. Definimos un Hamiltoniano efectivo mediante la

transformación

$$\begin{aligned} H_{eff} &= e^{iT} H'' e^{-iT} \\ &= H'' + i [T, H''] - \frac{1}{2} [T, [T, H]] + \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

Donde

$$T = -\sum_v I_v \theta_v \quad (3.36)$$

Debido al hecho de que T es de orden $O(Q^{-1/2})$, cada conmutación en (3.35) reduce el orden de la respectiva contribución, de tal manera que sólo consideraremos aquellos términos en H_{eff} que contribuyan a las correcciones de orden $O(Q^{-1})$ a la energía rotacional. Es decir, de los términos correspondientes a potencias pares de I tenemos que tomar aquellos que sean al menos de orden $O(Q^{-1})$, mientras que de los términos correspondientes a las potencias impares de I sólo nos interesan aquellos que sean de orden $O(Q^0)$ y superior. La expansión perturbativa correspondiente a la energía rotacional será construída explícitamente en la próxima sección.

Además del término H_{coup} , esta transformación elimina también de H_{eff} el término rotacional $\sum_v I_v^2/2D$ (ec. (3.25)).

3.4 Desarrollo perturbativo de la energía rotacional del sistema

Las correcciones de orden $O(Q^{-1})$ a las energías de la banda rotacional del estado fundamental del sistema las obtenemos a partir de la expresión

$$H_{\text{eff}}^{(\text{rot})} = \sum_v I_v^2 / 2\mathcal{I}_v + \sum_v a_v I_v + \sum_v b_v I_v^2 \quad (3.37)$$

donde a_v y b_v son los operadores fermiónicos (es decir, no dependen del impulso angular colectivo I_v) que resultan de las sucesivas conmutaciones en (3.35). Resulta, como veremos posteriormente, que $a_v = O(Q^0)$ y $b_v = O(Q^{-1})$. Además, no consideramos términos con potencias superiores en I , pues no hay entre ellos ninguno que contribuya a las correcciones de orden Q^{-1} .

Como hemos supuesto que nuestro sistema es invariante frente a inversión temporal, la energía rotacional no puede depender linealmente del impulso angular colectivo y, por lo tanto, el valor esperado del operador a_v en el estado fundamental tiene que ser cero. Entonces las correcciones de orden $O(Q^{-1})$ provenientes del nuevo término de Coriolis $\sum_v a_v I_v$ se originan exclusivamente en los diagramas de la figura 3.1 y corresponden al segundo orden en la teoría de perturbaciones (una vez eliminado el término H_{coup} no quedan en H_{eff} términos partícula-agujero que contribuyan al orden requerido con diagramas como el dibujado al lado izquierdo de (3.34)). Es por ello que el orden más bajo que tenemos que considerar en a_v es

$O(Q^0)$ (los denominadores de energía son de orden Q).

El término b_v contribuye con el valor esperado $\langle b_v \rangle$ a las correcciones de orden Q^{-1} , es decir contribuye a primer orden en teoría de perturbaciones.

Las conmutaciones (3.36) generan otro término cuadrático en I de la forma $\sum_{v \neq w} b_{vw} (I_v, I_w)$, donde los operadores b_{vw} son de orden $O(Q^{-1})$ pero tales que $\langle b_{vw} \rangle = 0$. Este término sería admisible desde el punto de vista de la invariancia frente a inversión temporal, pero su valor esperado es nulo puesto que la transformación de Nilsson es equivalente a una transformación a ejes principales.

Resulta conveniente para el cálculo de los operadores a_v y b_v escribir el Hamiltoniano H'' de la ec. (3.24) en la siguiente forma:

$$H'' = \sum_{i=1}^5 (H)_i \quad (3.38)$$

con

$$(H)_1 = \sum_v (I_v - J_v)^2 / 2D \quad (3.39a)$$

$$(H)_2 = \sum_v \theta_v^2 / 2A \quad (3.39b)$$

$$(H)_3 = H_{\det} \quad (3.39c)$$

$$(H)_4 = \sum_v I_v^2 / 2\beta_v \quad (3.39d)$$

$$(H)_5 = H - \sum_v J_v^2 / 2\beta_v \quad (3.39e)$$

Efectuando las conmutaciones sucesivas indicadas en (3.35), obtenemos operadores $(a_v)_i$ y $(b_v)_i$ originados por cada

Hamiltoniano $(H)_i$ en (3.38). Para los operadores que intervienen en el término de acoplamiento obtenemos:

$$(a_v)_1 = \sum_w (J_w, K_{vw}) / 2D \quad (3.40a)$$

$$(a_v)_5 = iR_v \quad (3.40b)$$

Donde K_{vw} es el operador definido por (3.32) y R_v está definido como

$$R_v = [H - \sum_v J_v^2 / 2J_v, \theta_v] \quad (3.41)$$

El término $(a_v)_1$ es de orden $O(Q^0)$, mientras que los términos $(a_v)_2 - (a_v)_4$ son de orden $Q^{-1/2}$ y por lo tanto no nos interesan, ya que contribuirían con términos de orden Q^{-2} a las correcciones a los momentos de inercia.

El término $(a_v)_5$ es también de orden $O(Q^0)$, pues, debido a la definición de θ_v y J_v (ecs. (3.17) y (3.18)), la parte $O(Q^{1/2})$ del conmutador R_v es exactamente cero. Como mencionamos en la sec. 3.3, en los casos $SU(2)$ y $SU(3)$ de las refs. [12c] y [10], $H - \sum_v J_v^2 / 2J_v$ es un operador de Casimir del grupo correspondiente y como los ángulos θ_v son generadores del grupo, resulta que $R_v = 0$ (ec. (3.31)) excluyendo así toda contribución del Hamiltoniano cuadrupolar a la energía rotacional del sistema.

En nuestro caso general esta cancelación completa no es posible pero continúa siendo válida al nivel RPA, puesto que $(H - \sum_v J_v^2 / 2J_v)_{RPA}$ es el operador de Casimir del grupo de Weyl en tres dimensiones generado por el operador unidad y los seis operadores $(J_v)_{RPA}$ y $(\theta_v)_{RPA}$ definidos en (3.30). El hecho que $(R_v)_{RPA} = 0$ significa que, a nivel RPA, nuestro sistema se

comporta como un rotor ideal con momentos de inercia J_v , ya que $\dot{\theta}_v (= i[H, \theta_v]_{RPA}) = (J_v)_{RPA} / J_v$.

Las expresiones para los operadores $(b_v)_i$ resultan ser

$$(b_v)_1 = (\theta_{v+1}^2/2 + \theta_{v+2}^2/2 + \{K_{v,v+2}, \theta_{v+1}\} - \{K_{v,v+1}, \theta_{v+2}\} + 2 \sum_w K_{vw}^2 + i \sum_w \{J_w, [K_{vw}, \theta_v]\}) / 4D \quad (3.41a)$$

$$(b_v)_2 = i(\{ \theta_{v+1}, [L_{v,v+1}, \theta_v] \} + \{ \theta_{v+2}, [L_{v,v+2}, \theta_v] \}) / 4A \quad (3.41b)$$

$$(b_v)_3 = (w_0/4) \sum_w [[K_{vv}, \theta_w], \theta_w] \quad (3.41c)$$

$$(b_v)_4 = \theta_{v+1}^2 (1/2J_{v+2} - 1/2J_v) + \theta_{v+2}^2 (1/2J_{v+1} - 1/2J_v) \quad (3.41d)$$

$$(b_v)_5 = \hbar (-S_{vv}^{(2)} + 2/3 U_v + 1/3 V_v) \quad (3.41e)$$

donde

$$U_v = \hbar (\{S_{v+2,v}^{(1)}, \theta_{v+1}\} - \{S_{v+1,v}^{(1)}, \theta_{v+2}\}) \quad (3.42a)$$

$$V_v = \hbar (\{S_{v,v+2}^{(1)}, \theta_{v+1}\} - \{S_{v,v+1}^{(1)}, \theta_{v+2}\}) \quad (3.42b)$$

y

$$S_{vw} = [R_v, \theta_w] = [R_v^{(1)} + R_v^{(2)}, \theta_w] \quad (3.43)$$

El supraíndice $(n)=1,2$ indica que se trata de la parte de uno o de dos cuerpos del operador.

Además

$$L_{vw} = -i[\theta_v, \theta_w] \quad (3.44)$$

El valor esperado de todos los operadores $(b_v)_i$ es de orden $O(Q^{-1})$.

3.5 Cálculo de las correcciones de primer orden a los momentos de inercia del sistema

Las correcciones a los parámetros rotacionales provenientes de ambos términos $\sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} I_{\mathbf{v}}$ y $\sum_{\mathbf{v}} b_{\mathbf{v}} I_{\mathbf{v}}^2$ en (3.37) son de orden $O(Q^{-1})$ y, por lo tanto, un orden de magnitud menores que los parámetros rotacionales de Thouless-Valatin definidos a través de la RPA en la sección 3.2. Por consiguiente es válido aceptar los parámetros rotacionales de Thouless-Valatin, $1/2\mathcal{J}_{\mathbf{v}}$, como el término de orden cero en una expansión en potencias de Q^{-1} . El siguiente término en la expansión, $1/2\mathcal{J}_{\mathbf{v}}^{(1)}$, proviene de los tratamientos a primer orden en teoría de perturbaciones del término $\sum_{\mathbf{v}} b_{\mathbf{v}} I_{\mathbf{v}}^2$ y a segundo orden del término $\sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} I_{\mathbf{v}}$. Su cálculo se hará en las secciones siguientes.

$1/2\mathcal{J}_{\mathbf{v}}^{(1)}$ tiene que ser una cantidad finita en el límite $D \rightarrow 0$ e independiente del parámetro de gauge A . Si expandimos esta cantidad en potencias de $D^{1/2}$, resulta

$$(\mathcal{J}_{\mathbf{v}}^{(1)})^{-1} = \lim_{D \rightarrow 0} \sum_{m=-3}^{\infty} (A_{\mathbf{v}}^{(m)} + B_{\mathbf{v}}^{(m)}) (D^{1/2})^m \quad (3.45)$$

donde $A_{\mathbf{v}}^{(m)}$ ($B_{\mathbf{v}}^{(m)}$) es el coeficiente de la potencia $(D^{1/2})^m$ de la parte de la corrección a los parámetros rotacionales que proviene de $\sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} I_{\mathbf{v}}$ ($\sum_{\mathbf{v}} b_{\mathbf{v}} I_{\mathbf{v}}^2$). Estos coeficientes serán calculados en las dos subsecciones siguientes.

Los coeficientes $(A_{\mathbf{v}}^{(m)} + B_{\mathbf{v}}^{(m)})$ con $m < 0$ tienen que anularse; el coeficiente $(A_{\mathbf{v}}^{(0)} + B_{\mathbf{v}}^{(0)})$ da la corrección $1/2\mathcal{J}_{\mathbf{v}}^{(1)}$ y, por lo tanto, tiene que ser independiente del parámetro A .

En el caso del modelo de Elliott en dos y tres dimensiones

(refs. [12c] y [10]), los momentos de inercia de orden cero son ya los momentos de inercia exactos, así que se demostró que la corrección a primer orden se anula. En nuestro caso general, el demostrar que la corrección $1/23_v^{(1)}$ es finita e independiente de A implica una mejor prueba de la validez del método.

3.5.1 Evaluación de las correcciones diagramáticas

Procedemos a evaluar los diagramas de la fig. 3.1 que proceden del término de acoplamiento $\sum_v a_v I_v$ y que contribuyen, como mencionamos anteriormente, a las correcciones de orden más bajo a los elementos de matriz rotacionales correspondientes a la banda del estado fundamental. En estos diagramas dos fonones son creados y subsiguientemente aniquilados. Esto significa que de la expresión fonónica para el operador a_v (ver apéndice C) sólo nos interesa la parte que contiene productos $r^+ r^+$ y $r r$:

$$a_v \rightarrow \sum_{nn'} \sum_{ss'} (-1)^T a_b^T(s, n | s', n') [(r_n^+(s, T) r_{n'}^+(s', T))_0 + f(a_v) (r_n(s, T) r_{n'}(s', T))_0] \quad (3.46)$$

Debido a las simetrías de a_v , $g(a_v) = (-1)^{v+1}$ y $f(a_v) = -(-1)^v$ (ver tabla B.1) los vértices fonónicos a_b^T sólo son diferentes de cero para $(s, s') = (v+1, v+2)$ ó $(s, s') = (v, v)$. A estos vértices contribuyen los dos términos $(a_v)_1$ y $(a_v)_5$ de la ec. (3.40). La parte correspondiente al anticonmutador (término $(a_v)_1$) la podemos construir explícitamente usando las expresiones fonónicas para J_w (ec. (3.30a)) y K_{vw} (ec. (C.14)), dado que la parte de orden $O(Q^0)$ del anticonmutador es precisamente $\{(J_w)_{RPA}, (K_{vw})_{RPA}\}$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_w \{J_w, K_{vw}\} / 2D \rightarrow \\
& -(-i)^v [(-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} + (-1)^{v+1} k_{v+2,v+1}] \\
& [\Gamma_o^+(v+1) \Gamma_o^+(v+2) - (-1)^v \Gamma_o(v+1) \Gamma_o(v+2)] / 2D \\
& + i(\omega_o/2D)^{1/2} \sum_w (-i)^w \sum_n K_{vw}(s,n) [\Gamma_o^+(w) \Gamma_n^+(s) - (-1)^v \Gamma_o(w) \Gamma_n(s)] \\
& \hspace{15em} (3.47)
\end{aligned}$$

La contribución a a_b^T proveniente de $(a_v)_5$ está dada (a menos del factor i) por la expresión fonónica del operador R_v (ver ec. (C.4)). Entonces, sumando por separado las contribuciones correspondientes a la creación y destrucción de dos fonones espúreos, de un fonón espúreo y uno físico y de dos fonones físicos obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_b^0(v+1,0|v+2,0) &= a_b^0(v+2,0|v+1,0) \\
&= -(-i)^v [(-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} + (-1)^{v+1} k_{v+2,v+1}] / 4D \\
&\quad + i R_b^0(v+1,0|v+2,0) \hspace{10em} (3.48a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_b^0(w,0|s,n) &= a_b^0(s,n|w,0) \\
&= i (\omega_o/8D)^{1/2} (-i)^w K_{vw}(s,n) + i R_b^0(w,0|s,n) \hspace{2em} (3.48b) \\
&= i (\omega_o/8D)^{1/2} (-i)^w K_{vw}(s,n) + i (2D\omega_o)^{-1/2} R_1(w,0|s,n) \\
&\quad + i (D\omega_o/2)^{1/2} R_2(w,0|s,n)
\end{aligned}$$

con $(w,s)=(v+1,v+2)$ ó $(w,s)=(v,a)$. Hemos hecho uso de la relación (C.9) que define las cantidades R_1 y R_2 .

Finalmente

$$a_b^T(s,n|s',n') = i R_b^T(s,n|s',n') \hspace{10em} (3.48c)$$

con $(s,s')=(v+1,v+2)$ ó $(s,s')=(v,a)$

El Hamiltoniano con vínculos H'' (ec. 3.24) actúa sobre funciones de onda pertenecientes al espacio producto correspondiente a grados de libertad rotacionales (colectivos) y grados de libertad intrínsecos (fermiónicos) y, por consiguiente, para cada valor I del impulso angular colectivo existen $2I+1$ conjuntos completos de estados fermiónicos. El término de acoplamiento $\sum_v a_v I_v$ mezcla estados intrínsecos con diferentes valores de K (proyección de I sobre el eje z fijo al cuerpo). Esto significa, como se indica a la izquierda de cada diagrama en la fig. 3.1, que del estado rotacional $|IK\rangle$ podemos pasar a estados $|IK\rangle$ ó $|IK\pm 2\rangle$ con $|IK\rangle$ ó $|IK\pm 1\rangle$ como estados intermedios. Si expresamos las componentes cartesianas I_v de operadores de impulso angular colectivo en términos de las componentes esféricas $I_+=I_x+iI_y$, $I_-=I_x-iI_y$, I_z podemos escribir

$$\sum_v a_v I_v = 1/2(a_x - ia_y)I_+ + 1/2(a_x + ia_y)I_- + a_z I_z \quad (3.49)$$

Debido a la forma particular de los vértices en (3.47), un estado intermedio creado por un dado a_v no puede ser aniquilado por a_w si $v \neq w$. Por consiguiente, la suma de las contribuciones de los diagramas de la fig. 3.1 no contiene mezclas $a_v a_w$ con $v \neq w$ y es de la forma $\sum_v A_v I_v^2$; es decir, contribuye a las correcciones a los parámetros inerciales con las cantidades

$$A_V = \sum_T \hat{T}^2 \sum_{ss'} \sum_{nn'} (-1)^V [a_b^T(s, n | s', n')]^2 / [\omega_n(s, T) + \omega_{n'}(s', T)] \quad (3.50a)$$

En esta expresión podemos separar las contribuciones $A_V^{(ee)}$ proveniente de la creación y destrucción de dos fonones espúreos, $A_V^{(ef)}$ proveniente de los diagramas donde se crean y destruyen un fonón espúreo y uno físico y $A_V^{(ff)}$ proveniente de la creación y destrucción de dos fonones físicos. Reemplazando cada una de las contribuciones (3.48) en (3.50a) obtenemos entonces

$$A_V^{(ee)} = (k_{v+1, v+2} + (-1)^V k_{v+2, v+1})^2 / (8D^2 \omega_0) \quad (3.50b)$$

$$- i^V ((-1)^{V+1} k_{v+1, v+2} + (-1)^{V+2} k_{v+2, v+1}) R_b^0(v+1, 0 | v+2, 0) / (\omega_0 D)$$

$$A_V^{(ef)} = - \sum_n \sum_w (-1)^S [(\omega_0 / 2D) K_{vw}(s, n)^2$$

$$+ 2(i)^W K_{vw}(s, n) R_1(w, 0 | s, n) / D + 2(i)^W \omega_0 K_{vw}(s, n) R_2(w, 0 | s, n)$$

$$+ (2/D\omega_0) (-1)^W R_1(w, 0 | s, n)^2] / [\omega_0 + \omega_n(s, 0)]$$

$$= -(1/2D) \sum_n \sum_w (-1)^S K_{vw}(s, n)^2 \quad (3.50c)$$

$$- (1/D\omega_0) \sum_n \sum_w (-1)^S (i)^W R_1(w, 0 | s, n) K_{vw}(s, n)$$

$$- (A/2) \sum_n \sum_w (-1)^S [K_{vw}(s, n) \omega_n(s, 0) - 2i^W R_1(w, 0 | s, n)]^2$$

$$- 2 \sum_n \sum_w (-1)^S i^W K_{vw}(s, n) R_2(w, 0 | s, n)$$

$$A_V^{(ff)} =$$

$$- 2(-1)^V \sum_T \hat{T}^2 \sum_{n, n'} \sum_{s, s'} [R_b^{(T)}(s, n | s', n')]^2 / [\omega_n(s, T) + \omega_{n'}(s', T)] \quad (3.50d)$$

En estas expresiones hemos ya omitido los términos

correspondientes a potencias positivas de D. El primer término en $A_v^{(ee)}$ es proporcional a $D^{-3/2}$ y el segundo a $D^{-1/2}$. En $A_v^{(ef)}$ tenemos términos proporcionales a D^{-1} , $D^{-1/2}$ y D^0 , mientras que $A_v^{(ff)}$ sólo contiene términos independientes de D. Entonces, finalmente, las diferentes contribuciones provenientes del término de Coriolis $\sum_v a_v I_v$ a la expansión en potencias de $D^{1/2}$ de la corrección a los momentos de inercia (ec (3.45)) son:

$$A_v^{(-3)} = (k_{v+1,v+2} + k_{v+2,v+1})^2 / (8D^2 w_0) \quad (3.51a)$$

$$A_v^{(-2)} = -(1/2D) \sum_n \sum_w (-1)^S K_{vw}(s,n)^2 \quad (3.51b)$$

$$\begin{aligned} A_v^{(-1)} = & -i i^v ((-1)^{v+1} k_{v+1,v+2} \\ & + (-1)^{v+2} k_{v+2,v+1}) R_b(v+1,0|v+2,0) / (w_0 D) \\ & - (1/D w_0) \sum_n \sum_w (-1)^S (i)^w R_1(w,0|s,n) K_{vw}(s,n) \end{aligned} \quad (3.51c)$$

$$\begin{aligned} A_v^{(0)} = & -(A/2) \sum_n \sum_w (-1)^S [K_{vw}(s,n) w_n(s,0) - 2i^w R_1(w,0|s,n)]^2 \\ & - 2 \sum_n \sum_w (-1)^S i^w K_{vw}(s,n) R_2(w,0|s,n) \\ & - 2(-1)^v \sum_T T^2 \sum_{n,n'} \sum_{s,s'} [R_b^{(T)}(s,n|s',n')]^2 / [w_n(s,T) + w_{n'}(s',T)] \end{aligned} \quad (3.51d)$$

Como demostraremos en la próxima subsección, las tres primeras contribuciones se cancelan exacta y no trivialmente con las correspondientes contribuciones del término $\sum_v b_v I_v^2$. Lo mismo debería suceder con el término lineal en A que aparece en el coeficiente de D^0 en (3.51d). Sin embargo, no existe un término semejante en las correcciones a los momentos de inercia provenientes del término $\sum_v b_v I_v^2$. Debido al hecho de que las

cantidades físicas no pueden depender del parámetro de gauge A , es necesario demostrar que el primer término en (3.51d) es nulo. Para ello es necesario relacionar los elementos de matriz del conmutador $R_V = [H - \sum_w J_w^2 / 23_w, \theta_V]$ con los elementos de matriz del conmutador K_{vw} . Haciendo uso de la invariancia rotacional del Hamiltoniano original H , podemos escribir $0 = [[H, J_w], \theta_V] = -i[H, K_{vw}] + [[H, \theta_V] J_w]$. Como se demuestra en el apéndice D (ec (D.4)), esta relación implica que cada sumando del término lineal en A en (3.51d) es idénticamente igual a cero, de tal manera que

$$A_V^{(0)} = -2 \sum_n \sum_w (-1)^S i^w K_{vw}(s, n) R_2(w, 0 | s, n) - 2(-1)^V \sum_T \hat{T}^2 \sum_{n, n'} \sum_{s, s'} [R_b^{(T)}(s, n | s', n')]^2 / [\omega_n(s, T) + \omega_{n'}(s', T)] \quad (3.52)$$

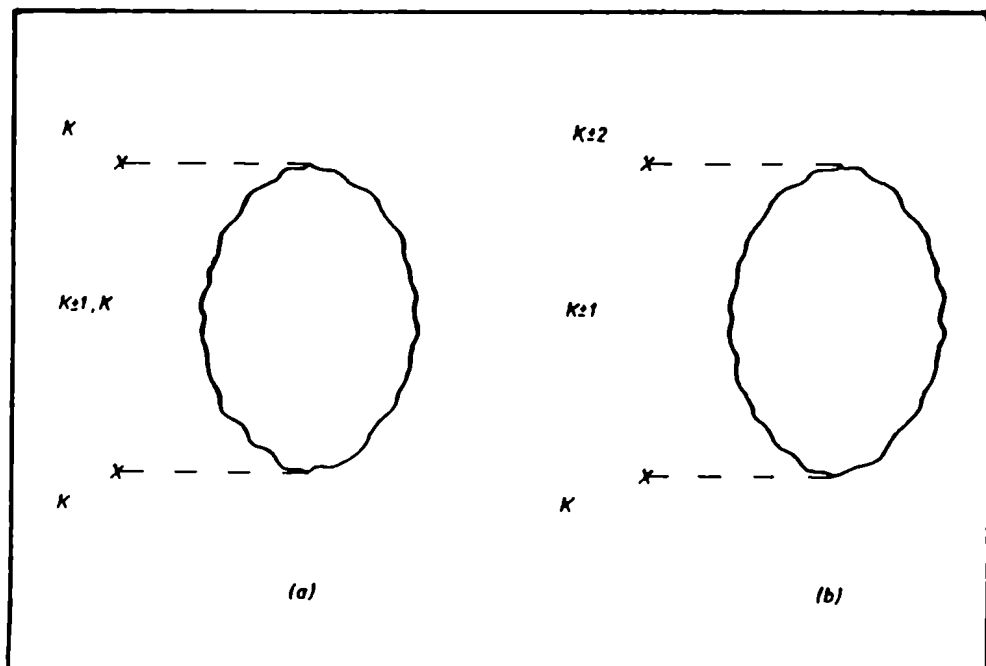


Figura 3.1: Diagramas de segundo orden provenientes del término de acoplamiento $\sum_v a_v I_v$ del Hamiltoniano efectivo.

3.5.2. Evaluación de los valores esperados de los operadores b_v en el estado fundamental RPA

Los valores esperados $B_v = \langle b_v \rangle$ de los operadores en (3.41) son todos, como ya anticipamos, de orden $O(Q^{-1})$ y pueden agruparse en tres categorías de acuerdo a la forma como se calculan:

a) Valores esperados de anticonmutadores (o de cuadrados) de operadores de un cuerpo, $\{A, B\}$. En todos los casos el término de orden superior es de orden $O(Q^{-1})$ y corresponde a la cantidad $\langle \{A_{RPA}, B_{RPA}\} \rangle$. Entonces calculamos el anticonmutador usando las versiones fonónicas RPA (ver apéndice C) para cada uno de los operadores de un cuerpo; el valor esperado se obtiene por contracción de Wick entre los operadores fonónicos. Equivalentemente, el valor esperado del anticonmutador está dado por la constante $Z^{(0)}$ de la ec. (B.13c).

b) El valor esperado del operador de dos cuerpos S_{VV} , cuyo término de orden superior está dado por la constante correspondiente a la contracción en la versión fonónica del operador S_{VV} (ec. (C. 5a)).

c) El valor esperado del operador de un cuerpo $(b_v)_3$ (ec. (3.41c)) que se obtiene ya sea a partir del término constante en la expresión del conmutador entre dos operadores de un cuerpo (ec. (B. 6)), o bien mediante la conmutación a nivel fonónico $[[K_{ww}, \theta_v]_{RPA}, \theta_v]_{RPA}$.

De esta manera obtenemos las siguientes contribuciones a la expansión en potencias de $D^{1/2}$ del valor esperado de los operadores $(b_v)_1$, $(b_v)_2$ y $(b_v)_3$ (ecs. (3.41a)-(3.41c)):

$$\begin{aligned}
(B_v)_1^{(-3)} &= [1/2 + i(-1)^{v+2} (k_{v+1,v+2} - (-1)^v k_{v+2,v+1}) \\
&\quad - (k_{v+1,v+2})^2 - (k_{v+2,v+1})^2] / 4D^2 w_0 \\
&= - [k_{v+1,v+2} + (-1)^v k_{v+2,v+1}]^2 / 8D^2 w_0 \quad (3.53a)
\end{aligned}$$

$$(B_v)_1^{(-2)} = \sum_n \sum_w (-1)^s K_{vw}(s,n)^2 / 2D \quad (3.53b)$$

$$(B_v)_1^{(-1)} = w_0 \sum_w [(1+d_{vw})y_{vw} + 2(1-d_{vw})z_{vw}] \quad (3.53c)$$

$$(B_v)_2^{(-1)} = w_0 \sum_w (1-d_{vw}) (y_{vw} - 2z_{vw}) \quad (3.54)$$

$$(B_v)_3^{(-1)} = -2w_0 \sum_w y_{vw} \quad (3.55)$$

donde

$$\begin{aligned}
y_{vw} &= 2i(-1)^{v+w} \sum_{ph,p'h'} J_w(p'h') \theta_v(ph) \\
&\quad [\theta_v(ph') \theta_w(p'h) + \theta_v(p'h) \theta_w(ph')] \\
z_{vw} &= 2i \sum_{ph,p'h'} J_w(p'h') \theta_w(ph) \theta_v(ph') \theta_v(p'h) \quad (3.56)
\end{aligned}$$

En la ec. (3.53c) hemos usado la relación (D.1). Como se observa, los coeficientes correspondientes a las potencias $D^{-3/2}$ y D^{-1} (ecs. (3.51b) y (3.51c)), se cancelan exactamente con las correspondientes contribuciones provenientes de las correcciones diagramáticas (ecs. (3.51b) y (3.51c)), mientras que los términos correspondientes a $D^{-1/2}$ en las ecs. (3.53c), (3.54) y (3.55) se cancelan entre sí.

Faltan aún los valores esperados de los operadores $(b_v)_4$ y $(b_v)_5$ (ecs. (3.41d) y (3.41e)). Para $(B_v)_4$ obtenemos

$$(B_v)_4^{(-1)} = (1/3_{v+1} + 1/3_{v+2} - 2/3_v)/4Dw_0 \quad (3.57)$$

Para el cálculo de los valores esperados de los operadores U_v y V_v que aparecen en $(b_v)_5$ necesitamos calcular $(S_{vw}^{(1)})_{RPA} = [R_v^{(1)} + R_v^{(2)}, \theta_v]_{RPA}$. Para ello usamos las expresiones fonónicas (C. 12) y (C. 4) para los operadores de uno y dos cuerpos y obtenemos

$$(S_{vw}^{(1)})_{RPA} = (-i)^w (2/Dw_0)^{1/2} \sum_{sn} [R_f^0(s, n|w, 0) - (-1)^w R_b^0(s, n|w, 0)] [\Gamma_n^+(s) + (-1)^s \Gamma_n(s)] \quad (3.58)$$

con v, w, s cíclicos si $v \neq w$; si $v = w$ entonces $s = a$. Así obtenemos

$$\langle (S_{vw}^{(1)})_{RPA}, (\theta_{w'})_{RPA} \rangle = (-i)^w (-i)^{w'} [R_f^0(w', 0|w, 0) - (-1)^w R_b^0(w', 0|w, 0)] ((-1)^v (-1)^w + (-1)^{w'}) / Dw_0 \quad (3.59)$$

de donde sigue

$$\begin{aligned} \langle U_v \rangle / 3 + \langle V_v \rangle / 6 = & + (1/3Dw_0) [(-1)^v i^{v+2} R_f(v, 0|v+1, 0) \\ & - (-1)^v i^{v+1} R_f(v, 0|v+2, 0) - (-1)^{v+1} i^v R_f(v+1, 0|v+2, 0) \\ & + (-i)^{v+2} R_b(v, 0|v+1, 0) - (-1)^{v+1} R_b(v, 0|v+2, 0)] \quad (3.60) \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ecuación (D. 10) que relaciona los elementos de matriz del operador R_v con los momentos de inercia de orden cero, podemos escribir

$$\langle Uv \rangle / 3 + \langle Vv \rangle / 6 = (-1/3_{v+1} - 1/3_{v+2} + 2/3_v) / 4Dw_0 \quad (3.61)$$

expresión que cancela exactamente la contribución de $(B_v)_5^{(-1)}$ en (3.57).

Finalmente, usando las expresiones (C. 5a) y (C. 6) para el valor esperado $\langle S_{vv} \rangle$, se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} -\langle S_{vv} \rangle / 2 = & \sum_w [[S_{vv}, J_w], J_w] / 8Dw_0 \\ & - 2i \sum_w (-1)^w \sum_{ph, p'h'} S_f^0(w, ph|w, p'h') J_w(ph) \theta_w(p'h') \\ & - 1/2 \sum_T T^2 \sum_n \sum_{ph, p'h'} [S_f^T(w, ph|w, p'h') \mu(n, ph; w, T) \\ & + S_b^T(w, ph|w, p'h') \lambda(n, ph; w, T)] \mu(n, p'h'; w, T) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Sumando entonces todas las contribuciones de los valores esperados $(B_v)_i$ a los coeficientes de $D^{-1/2}$ y D^0 , obtenemos

$$(B_v)^{(-1)} = \sum_w [[S_{vv}, J_w], J_w] / 8Dw_0 \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} (B_v)^{(0)} = & -2i \sum_w (-1)^w \sum_{ph, p'h'} S_f^0(w, ph|w, p'h') J_w(ph) \theta_w(p'h') \\ & - 1/2 \sum_T T^2 \sum_n \sum_{ph, p'h'} [S_f^T(w, ph|w, p'h') \mu(n, ph; w, T) \\ & + S_b^T(w, ph|w, p'h') \lambda(n, ph; w, T)] \mu(n, p'h'; w, T) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Como se muestra en el apéndice D, (ec. (D. 11)), la contribución $(B_V)^{(-1)}$ (ec. (3.63)) anula exactamente la contribución $(A_V)^{(-1)}$ proveniente de las correcciones diagramáticas (ec. (3.51)).

3.5.3 Resultado final

Hemos demostrado que todos los coeficientes correspondientes a potencias negativas de D en la expansión de las correcciones a los parámetros inerciales (ec. (3.45)) se anulan y que la contribución en D^0 es independiente del parámetro de gauge A, tal como es requerido por la física del problema. Sumando los resultados de las ecs. (3.52) y (3.64) obtenemos para la corrección de primer orden a los parámetros de inercia de nuestro sistema la expresión final

$$\begin{aligned}
 1/23_V^{(1)} = & -2 \sum_n \sum_w (-1)^S i^w K_{vw}(s,n) R_2(w,0|s,n) \\
 & -2i \sum_w (-1)^w \sum_{ph,p'h'} S_f^0(w,ph|w,p'h') J_w(ph) \theta_w(p'h') \\
 & -2(-1)^V \sum_T \hat{T}^2 \sum_{ss',nn'} [R_b^T(s,n|s',n')]^2 / [\omega_n(s,T) + \omega_{n'}(s',T)] \\
 & - 1/2 \sum_T \hat{T}^2 \sum_n \sum_w \sum_{ph,p'h'} [S_f^T(w,ph|w,p'h') \mu(n,ph;w,T) + \\
 & + S_b^T(w,ph|w,p'h') \lambda(n,ph;w,T)] \mu(n,p'h';w,T)
 \end{aligned} \quad (3.65)$$

El significado físico de esta corrección puede aclararse si escribimos el conmutador R_V definido en (3.41) en términos de sus componentes partícula-agujero (ph) y de dispersión (s) de un cuerpo y la de dos cuerpos (tb) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
iR_V &= i[H, \theta_V]_{ph} - (J_V)_{ph}/\mathcal{J}_V \\
&+ i[H, \theta_V]_S - (J_V)_S/\mathcal{J}_V \\
&+ i[H, \theta_V]_{tb} - \sum_w \{J_V K_{Vw}\}/2\mathcal{J}_w
\end{aligned}
\tag{3.66}$$

Sabemos que la elección de los momentos de inercia de orden cero, \mathcal{J}_V , y de los operadores ángulo, θ_V , (ecs. (3.17) y (3.18)) implica que la componente partícula-agujero de R_V se hace cero (c.f. secc.3.4). Esta elección es siempre posible para un sistema deformado cualquiera y sabiendo que la componente partícula-agujero de la velocidad angular del sistema está dada por

$$(\dot{\theta}_V)_{ph} = i[H, \theta_V]_{ph} = (J_V)_{ph}/\mathcal{J}_V \tag{3.67}$$

concluimos entonces que, dentro de la aproximación RPA, nuestro sistema se comporta como un rotor ideal con momentos de inercia Thouless-Valatin, \mathcal{J}_V . Si el sistema fuera realmente un rotor ideal (trompo triaxial de momentos de inercia \mathcal{J}_V), entonces tanto R_V (ec. (3.41)) como su conmutador, S_{Vw} (3.43), se anularían y con ellos las correcciones calculadas en (3.65). En el caso del modelo de Elliott en dos y tres dimensiones (refs. [10] y [12c]), a pesar de que en ninguno de los dos casos se trata de un rotor ideal, se tiene que $R_V = S_{Vw} = 0$ (ec (3.31)). En consecuencia, todas las correcciones a los momentos de inercia RPA son cero y el sistema se comporta como si fuera un rotor ideal con parámetros inerciales $1/2\mathcal{J}_V$. En efecto, para el modelo de $SU(3)$ de Elliott los momentos de inercia de Thouless-Valatin coinciden con los valores exactos.

Para el caso de un núcleo deformado hemos visto que R_V y

S_{vw} no se anulan y, por lo tanto, podemos decir que la expresión (3.65) da cuenta de la alteración que sufren los parámetros inerciales del sistema debida al hecho de que el núcleo no es un rotor ideal con momentos de inercia Thouless-Valatin.

La corrección que hemos calculado incluye sistemáticamente todas las posibles contribuciones al orden $O(Q^{-1})$ de la expansión perturbativa de la energía rotacional del sistema discutida en la sec. 3.4, y, tal como se espera de cualquier resultado físico dentro del método que aplicamos, es finita en el límite en el que recobramos la simetría rotacional original del problema y es independiente del parámetro A . Obsérvese que los dos últimos términos de la expresión (3.65) sólo incluyen fonones físicos y aparecerían en cualquier tratamiento en el cual se excluyan los vínculos y/o se ignoren los fonones espúreos. Por el contrario, los dos primeros términos de la corrección (ec. (3.65)) a los momentos de inercia son generados por los fonones espúreos y son finitos a pesar de que éstos se desacoplan del espectro en el límite $D \rightarrow 0$. Tal como se demuestra en la ref. [10], estos términos son esenciales para obtener el resultado correcto.

IV. CALCULO DE LOS PARAMETROS ROTACIONALES DEL ^{24}Mg

4.1 El Hamiltoniano

Para el tratamiento de los núcleos de la capa s-d se supone que las tres subcapas $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ y $1d_{3/2}$ son activas mientras que el carozo $^{16}\text{O}=(1s)^4(1p)^{12}$ permanece inerte. Entonces, el Hamiltoniano efectivo más general de (1+2)-cuerpos (ec. (3.1)) en el espacio $d_{5/2} s_{1/2} d_{3/2}$ queda completamente determinado por las tres energías de partícula independiente $\epsilon_{j\alpha}$ (recordemos que designamos con letras griegas los orbitales esféricos del modelo de capas con $| \alpha \rangle = | n, l, j, m_l, m_t, m_t \rangle$) y por los 63 elementos de matriz de la interacción efectiva entre estados de dos partículas normalizados, antisimetrizados y acoplados a buen J y a buen T (impulso angular total e isospín del estado de dos partículas respectivamente). Para los estados antisimetrizados $| j_\alpha, j_\beta; JT \rangle_a$, si $j_\alpha = j_\beta$, entonces se cumple que $(-1)^{T+J} = -1$. Con esta restricción tenemos seis estados $| 5/2, 5/2; JT \rangle_a$, dos estados $| 1/2, 1/2; JT \rangle_a$ y cuatro estados $| 3/2, 3/2; JT \rangle_a$. Como para el caso $j_\alpha \neq j_\beta$ no hay restricción, tenemos cuatro estados $| 5/2, 1/2; JT \rangle_a$, ocho estados $| 5/2, 3/2; JT \rangle_a$ y cuatro estados $| 3/2, 1/2; JT \rangle_a$. De esta manera se llegan a formar los 63 elementos de matriz $\langle j_\alpha, j_\beta; JT | V | j_\gamma, j_\delta; JT \rangle_a$. Para nuestro cálculo utilizamos las mismas energías de partícula independiente y los mismos elementos de matriz de la interacción efectiva utilizados por McGrory (ref. [13a]) y calculados fenomenológicamente por Chung (ref. [13b]) mediante un ajuste de cuadrados mínimos a los

niveles espectrales observados. Las energías de partícula independiente usadas son

$$\epsilon_{5/2} = -4.15 \text{ Mev} \quad \epsilon_{1/2} = -3.28 \text{ Mev} \quad \epsilon_{3/2} = 0.87 \text{ Mev} \quad (4.1a)$$

Las dos primeras, $\epsilon_{5/2}$ y $\epsilon_{1/2}$, fueron obtenidas a partir de los espectros experimentales del ^{17}O y de ^{17}F de la siguiente manera (ref. [25]): la energía medida para ligadura de un neutrón al ^{16}O es $E_n = 4.142 \text{ Mev}$, mientras que la de un protón es $E_p = 7.699 \text{ Mev}$. La energía de ligadura Coulombiana estimada empíricamente es de $E_p(\text{Coul}) = 3.544 \text{ Mev}$. La energía del primer orbital fuera de capa cerrada $1d_{5/2}$ se calcula como el negativo del promedio entre E_n y $E_p - E_p(\text{Coul})$. La energía del orbital $2s_{1/2}$ se calculó sumándole esta cantidad a la energía de excitación correspondiente obtenida del espectro del ^{17}O . La energía $\epsilon_{3/2}$ fue tomada como parámetro libre en el ajuste a los datos experimentales.

La interacción efectiva de dos cuerpos es obtenida, en una primera aproximación, a partir del potencial nucleón-nucleón de Hamada-Johnston (ref. [26]) utilizando el método de la matriz de reacción G al estilo de Kuo y Kuo y Brown (ref. [27]). El potencial de Hamada-Johnston es un potencial de carozo duro ($v(r) = \infty$ para $r < 0.4 \text{ fm.}$) calculado a partir de una combinación de fuerzas locales y de spin-órbita ajustada para reproducir los datos experimentales de la dispersión nucleón-nucleón y el momento cuadrupolar del deuterón. El método de la matriz G (introducido originalmente por Brueckner (ref. [28]) a fin de tratar perturbativamente potenciales singulares) consiste en resolver autoconsistentemente la ecuación de Bethe-Goldstone

para la matriz G desnuda (tomando sólo en cuenta la interacción entre las partículas de valencia) en la aproximación de oscilador armónico y luego incluir los efectos de polarización del carozo debidos a su interacción con los nucleones de valencia.

Una vez obtenidos estos 63 elementos de matriz de la interacción efectiva realista, 18 de ellos y las dos energías $\epsilon_{5/2}$ y $\epsilon_{1/2}$ permanecen fijos en la diagonalización del modelo de capas, mientras que los 45 restantes, junto con $\epsilon_{3/2}$, se toman como parámetros libres en esta diagonalización. Los espectros obtenidos se ajustan a las energías observadas experimentalmente en los núcleos con $A=17-28$ fijando los parámetros libres mediante el método de cuadrados mínimos.

4.2 Determinación de la base deformada

Los orbitales de Nilsson del ^{24}Mg y la correspondiente interacción residual (cf. ec. (3.2)) se determinan mediante un cálculo de Hartree-Fock restringido en el cual se supone que sólo los ocho nucleones de valencia participan en la creación de su campo autoconsistente deformado; las partículas del carozo (^{16}O) permanecen inertes durante este proceso.

La base esférica ($|\alpha\rangle$) que elegimos como base de partícula independiente para expresar el Hamiltoniano original (3.1) está compuesta por los 24 vectores de estado $|\ln, \lambda, j, m, t, m_t\rangle$ correspondientes a la capa $1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}$. Si imponemos simetría elipsoidal a los estados de Hartree-Fock (es decir, basados en el resultado obtenido por Ripka, suponemos que el ^{24}Mg es un sistema triaxial pero con simetría elipsoidal),

entonces, debido a la cuádruple degeneración protón-neutrón e inversión temporal (ver sección 3.1) los estados deformados a determinar (estados pertenecientes al conjunto denominado {B}) se reducen a 6 y pueden ser expandidos en términos de los estados esféricos caracterizados por los números cuánticos n, l, j, m

$$\begin{aligned} \{|\alpha\rangle\} = \{ |d_{5/2 \ 5/2}\rangle, |d_{5/2 \ 1/2}\rangle, |d_{5/2 \ -3/2}\rangle, |s_{1/2 \ 1/2}\rangle, \\ |d_{3/2 \ -3/2}\rangle, |d_{3/2 \ 1/2}\rangle \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

El Hamiltoniano (3.1) puede entonces escribirse en la base deformada a determinar como

$$\begin{aligned} H = H_0 + H_{res} = \sum_{k_1 k_2} [\langle k_1 | h_0 | k_2 \rangle + \sum_k n_k \langle k_1 k | V | k k_2 \rangle_a] : c_{k_1}^+ c_{k_2} : \\ + \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \langle k_1 k_2 | V | k_3 k_4 \rangle : c_{k_1}^+ c_{k_2}^+ c_{k_4} c_{k_3} : \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde los puntos indican orden normal de los operadores y n_k representa el número de ocupación del orbital k ($n_k=1$ si k es una órbita ocupada; $n_k=0$ en caso contrario). Hemos omitido en (4.3) una constante que representa la suma de las energías de partícula independiente de las partículas en los orbitales ocupados. Los estados y energías de Hartree-Fock se obtienen autoconsistentemente a partir de H_0 , es decir resolviendo iterativamente la ecuación de autovalores

$$H_0 |k\rangle = E_k |k\rangle \quad (4.4a)$$

la cual puede escribirse en forma matricial como

$$\sum_r \langle \alpha | H_0 | r \rangle \langle r | k \rangle = E_k \langle \alpha | k \rangle \quad (4.4b)$$

con

$$\langle \alpha | H_0 | r \rangle = \epsilon_\alpha \delta_{\alpha r} + \sum_k n_k \sum_{\beta \sigma} \langle k | \beta \rangle \langle r | k \rangle \langle \alpha \beta | V | r \sigma \rangle a_{\sigma} \delta_{mt\alpha mt\beta} \quad (4.5)$$

donde las energías ϵ_α son las energías de partícula independiente de (4.1) y los elementos de matriz de la interacción efectiva se escriben en términos de los elementos de matriz acoplados a buen J y buen T utilizados por McGrory como

$$\begin{aligned} \langle \langle \alpha \beta | V | r \sigma \rangle \rangle_a \delta_{mt\alpha mt r} = & \sum_{JM} \langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM \rangle \langle j_r m_r j_\sigma m_\sigma | JM \rangle \\ & \{ 1/2 \langle \alpha \beta ; J0 | V | r \sigma ; J0 \rangle_a + 3/2 \langle \alpha \beta ; J1 | V | r \sigma ; J1 \rangle_a \} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Los estados deformados pertenecen al conjunto (B) y los estados esféricos pertenecen al conjunto (I α) (ec. (4.2)).

Para acelerar la convergencia hacia la solución triaxial que nos interesa usamos como punto de partida ("guess" inicial) las soluciones deformadas con simetría elipsoidal obtenidas por Ripka (ref. [29]), ya que la iteración de Hartree-Fock preserva la simetría de los estados en cada paso del procedimiento. Suponemos al comienzo de cada iteración que los dos estados más bajos en energía están ocupados y el procedimiento termina en el n-ésimo paso al satisfacerse el criterio de convergencia

$$|E_k^{(n)} - E_k^{(n-1)}| < 0.01 \text{ Kev.} \quad (4.7)$$

En nuestro cálculo numérico para el ^{24}Mg este criterio se

satisface después de 22 iteraciones. Las soluciones así obtenidas se muestran junto con el "guess" inicial en la tabla 4.1 y en la fig. 4.1.

Una vez determinados los estados deformados de Hartree-Fock y sus correspondientes energías, es decir una vez diagonalizado el Hamiltoniano H_0 de (4.3), la correspondiente interacción residual H_{res} queda unívocamente determinada.

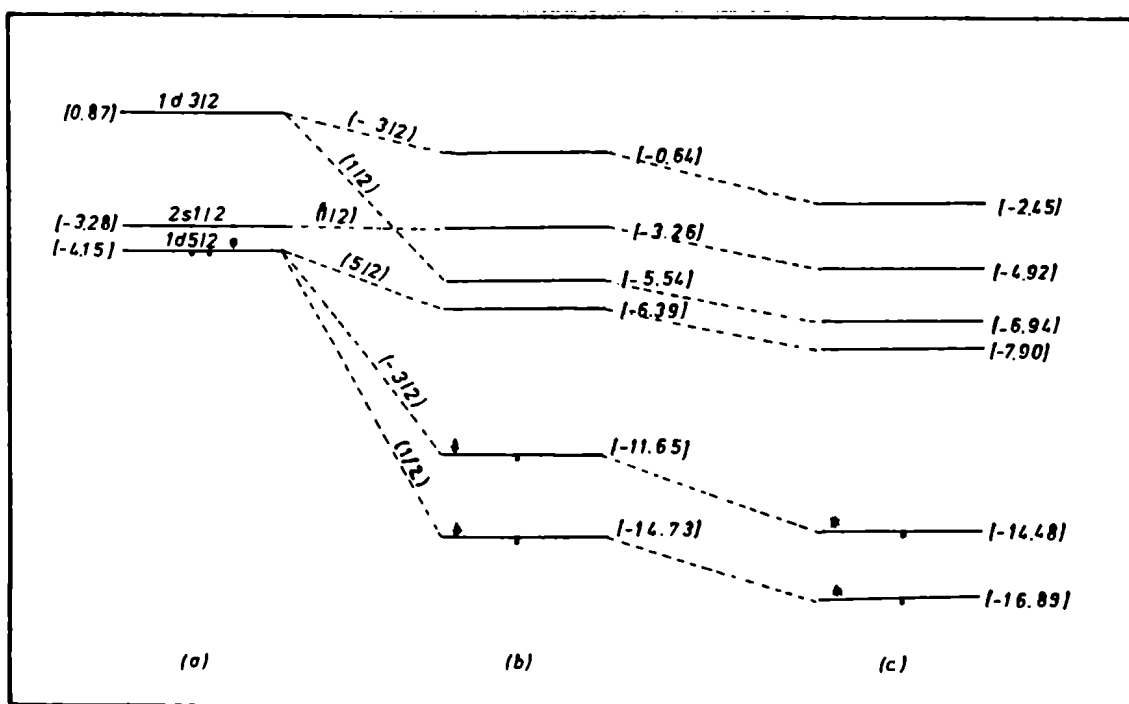


Figura 4.1: Orbitales de partícula independiente .

- a) Orbitales esféricos.
- b) Orbitales de Hartree-Fock calculados en este trabajo.
- c) "Guess" inicial (ref. [29]) .

Los números entre paréntesis sobre las líneas punteadas indican la proyección m de la componente esférica con mayor peso en cada uno de los orbitales deformados. Los números entre corchetes indican la energía de cada orbital (en Mev) y las estrellas marcan los orbitales ocupados.

Energía		Componentes Esféricas									
		5/2	5/2	5/2	1/2	5/2-3/2	1/2	1/2	3/2-3/2	3/2	1/2
1	-14.73	-0.0605	0.7472	0.0693	-0.5911	0.0741	-0.2800				
2	-11.65	0.0304	0.1960	0.8110	0.1648	0.2811	0.4435				
3	-6.39	0.8467	0.3681	-0.2047	0.2953	-0.0906	0.1013				
4	-5.44	-0.4352	0.4055	-0.4314	0.1884	-0.1137	0.6416				
5	-3.26	-0.0374	-0.0338	-0.2924	0.1928	0.9254	-0.1359				

Tabla 4.1: Soluciones Hartree-Fock para el ^2Mg . En negrita se muestra para cada solución la componente esférica de mayor peso.

4.3 Tratamiento RPA del Hamiltoniano y cálculo de los momentos de inercia de orden cero.

Los elementos de matriz "forward" y "backward" $H_f^T(s, ph|s, p'h')$ y $H_b^T(s, ph|s, p'h')$ correspondientes al Hamiltoniano original en la aproximación RPA (ec. (3.7)) se obtienen a partir de las expresiones de la tabla C.1 (para H_{res} y para H_0) en términos de los elementos de matriz de la interacción en la base deformada completa $\{B\}U\{\bar{B}\}$ para protones y para neutrones (24 vectores de estado). Estos elementos de matriz están dados por la expresión (A.18).

Trabajar con los elementos de matriz de los operadores en la base completa tiene la ventaja que se muestra en los apéndices B y C de poder calcular en forma general tanto las componentes RPA de cualquier operador como los diferentes conmutadores y anticonmutadores teniendo en cuenta tan sólo las propiedades de simetría características de cada operador. Sin embargo, el hecho de tener que tratar con muchos más números de los que serían necesarios si nos limitáramos a representar los operadores en términos de los estados de la base $\{B\}$ implica una mayor complicación en el cálculo computacional. El número de elementos de matriz (4.7) diferentes de cero es del orden de los 16000, lo cual da una idea del volumen de números con el que se opera.

A1 ^{24}Mg le corresponden en la base $\{B\}$ dos orbitales ocupados y cuatro desocupados; entonces podemos construir ocho estados $|p\bar{h}; T\rangle$ y ocho $|ph; T\rangle$ con $|p\rangle, |h\rangle \in \{B\}$. Por lo tanto, las matrices antisimétricas de la RPA (ec. (3.10a)) tienen dimensión 16×16 para cada s, T . De la diagonalización de estas

matrices obtenemos el conjunto de frecuencias $\omega_n(s,T) > 0$ y las correspondientes amplitudes $\lambda(n,ph;s,T)$ y $\mu(n,ph;s,T)$ que definen los modos normales de oscilación físicos del sistema (como es usual en el tratamiento RPA, sólo consideramos las raíces de frecuencia positiva) y los tres modos espúreos correspondientes a $\omega_0(v,T=0)$, $v=1,2,3$. El espectro de frecuencias obtenido se muestra en la figura 4.2 y se compara con el espectro de excitaciones partícula-agujero obtenido a partir de H_0 sin tener en cuenta la interacción residual.

El momento de inercia Thouless-Valatin J_v correspondiente a las rotaciones alrededor del eje v del sistema descrito por H_{RPA} , así como las ocho componentes partícula-agujero que definen el operador ángulo $(\theta_v)_{RPA}$ canónicamente conjugado a la componente RPA del impulso angular del sistema en la dirección v , $(J_v)_{RPA}$, se determinan a partir de las ecs. (3.17) y (3.18). Evaluando los conmutadores allí indicados, usando para los elementos de matriz de los operadores de un cuerpo la expresión de la ec. (B.8a) y (3.7) para H_{RPA} , obtenemos el siguiente sistema lineal de nueve ecuaciones para $\tilde{\theta}_v(ph)$ y $(1/J_v)$

$$\sum_{p'h' \in \{B\}} [H_f^0(v,ph|v,p'h') - (-1)^v H_b^0(v,ph|v,p'h')] J \tilde{\theta}_v(p'h') - \tilde{J}_v(ph) (1/J_v) = 0 \quad (4.7a)$$

$$\sum_{ph \in \{B\}} \tilde{J}_v(ph) \tilde{\theta}_v(ph) = 1/8 \quad (4.7b)$$

donde las cantidades reales $\tilde{J}_v(ph)$ y $\tilde{\theta}_v(ph)$ son proporcionales a los elementos de matriz de los operadores J_v y θ_v (ver ec. (A.15)). Así obtenemos para los parámetros inerciales de Thouless-Valatin el resultado

$$1/2J_1=0.08 \text{ Mev}/\hbar^2 \quad 1/2J_2=0.11 \text{ Mev}/\hbar^2 \quad 1/2J_3=0.32 \text{ Mev}/\hbar^2 \quad (4.8)$$

Reemplazando en (4.7a) la cantidad entre paréntesis cuadrados por $(E_p-E_h)\sigma_{pp}\sigma_{hh}$, es decir, despreciando la interacción residual, obtenemos para los parámetros de inercia "cranking" correspondientes a (3.22)

$$\begin{aligned} 1/2(J_1)_{\text{crank}} &= 0.16 \text{ Mev}/\hbar^2 & 1/2(J_2)_{\text{crank}} &= 0.17 \text{ Mev}/\hbar^2 \\ 1/2(J_3)_{\text{crank}} &= 0.48 \text{ Mev}/\hbar^2 & & (4.9) \end{aligned}$$

En la tabla 4.2 se comparan las componentes partícula-agujero de los operadores angulares θ_v (obtenidos a partir de (4.9)) correspondientes al rotor descrito por $(H_0+H_{\text{res}})_{\text{RPA}}$, las de $(\theta_v)_{\text{crank}}$ correspondientes a la rotación del sistema descrito por H_0 y las de los ángulos $(\theta_v)_{\text{SU}(3)}$ correspondientes al rotor de Elliott en 3 dimensiones (ref. [10]) definidos como $(\theta_v)_{\text{SU}(3)} = S_v / \langle Q_v \rangle$, donde $S_v = -2(3)^{1/2} \sum_i (x_{v+1} x_{v+2})_i$ (componentes no diagonales del operador cuadrupolar; la suma sobre i indica suma sobre todas las partículas) y $\langle Q_v \rangle$ es el valor esperado del operador $Q_v = 2(3)^{1/2} \sum_i (x_{v+2}^2 - x_{v+1}^2)_i$ (componentes diagonales del operador cuadrupolar). Para los momentos cuadrupolares estáticos $\langle Q_v \rangle$ obtuvimos los valores $\langle Q_1 \rangle = 27.18b^2$, $\langle Q_2 \rangle = -39.39b^2$ y $\langle Q_3 \rangle = 12.21b^2$, donde b es el parámetro de tamaño de oscilador armónico del ^{24}Mg :

$$b^2 \sim A^{1/3} \text{ fm}^2 = 2.88 \text{ fm}^2$$

De estos tres valores, sólo dos son independientes.

Definiendo $\langle Q_Y \rangle = -\langle Q_3 \rangle / 2$ y $\langle Q_\beta \rangle = (\langle Q_1 \rangle - \langle Q_2 \rangle) / 2(3)^{1/2}$, obtenemos

$$\langle Q_Y \rangle = -6.10b^2 = -17.5fm^2 \quad \langle Q_\beta \rangle = 17.77b^2 = 51.27fm^2 \quad (4.10)$$

El cociente entre estos dos momentos cuadrupolares intrínsecos es una medida de la desviación de la simetría axial con respecto al eje 3, la cual suele expresarse en términos del parámetro γ (ref. [21])

$$\tan\gamma = |\langle Q_Y \rangle / \langle Q_\beta \rangle| = 0.34$$

o sea,

$$(4.11)$$

$$\gamma = 19^\circ$$

Además, $\langle Q_\beta \rangle > 0$, es decir, el sistema tiene una forma prolada. Este valor se compara con el valor experimental $|\langle Q_\beta \rangle| = 57fm^2$ (ref. [30]) obtenido a partir de las probabilidades de transición E2, pero suponiendo que el sistema tiene simetría axial.

Una vez determinadas las soluciones RPA del Hamiltoniano original, los momentos de inercia de orden cero y las componentes partícula-agujero del operador ángulo, podemos encontrar, tal como se mostró en el capítulo anterior, las soluciones RPA correspondientes al Hamiltoniano con vínculos (ecs. (3.24) y (3.25)), es decir, al Hamiltoniano al cual se le ha añadido un potencial de restitución para las rotaciones del sistema como un todo alrededor de cada eje v y que, por lo tanto, no presenta modos de frecuencia cero. De acuerdo con (3.27), la representación RPA del Hamiltoniano con vínculos

consiste en los modos de frecuencia finita del Hamiltoniano original más tres modos espúreos de frecuencia $\omega_0 = (AD)^{-1/2}$ y amplitudes λ y μ dadas por (3.29).

Numéricamente operamos un valor arbitrario para A y expandimos en serie de potencias de $D^{1/4}$ todas las cantidades que dependen de D . (Como resulta de los cálculos del capítulo anterior, en la expansión correspondiente a las correcciones a los parámetros inerciales (ec (3.45)), los coeficientes de las potencias impares de $D^{1/4}$ son iguales a cero). Entonces, ω_0 es un polinomio cuyo único coeficiente diferente de cero es el coeficiente correspondiente a la potencia $(D^{1/4})^{-2}$ y tiene el valor $A^{-1/2}$. En función de los elementos de matriz reales $\tilde{J}_V(ph)$ y $\tilde{\theta}_V(ph)$ definidos en (A.15), (3.29) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \lambda(n=0, ph; v, T=0) = & [(2)^{1/2} A^{1/4} \tilde{J}_V(ph)] D^{-1/4} \\ & + [(2)^{1/2} A^{-1/4} \tilde{\theta}_V(ph)] D^{1/4} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mu(n=0, ph; v, T=) = & [(-1)^V (2)^{1/2} A^{1/4} \tilde{J}_V(ph)] D^{-1/4} \\ & - [(-1)^V (2)^{1/2} A^{-1/4} \tilde{\theta}_V(ph)] D^{1/4} \end{aligned}$$

es decir, para los polinomios que representan las amplitudes de los fonones espúreos, los coeficientes de $(D^{1/4})^{-1}$ y $D^{1/4}$ son diferentes de cero y pueden leerse de (4.12).

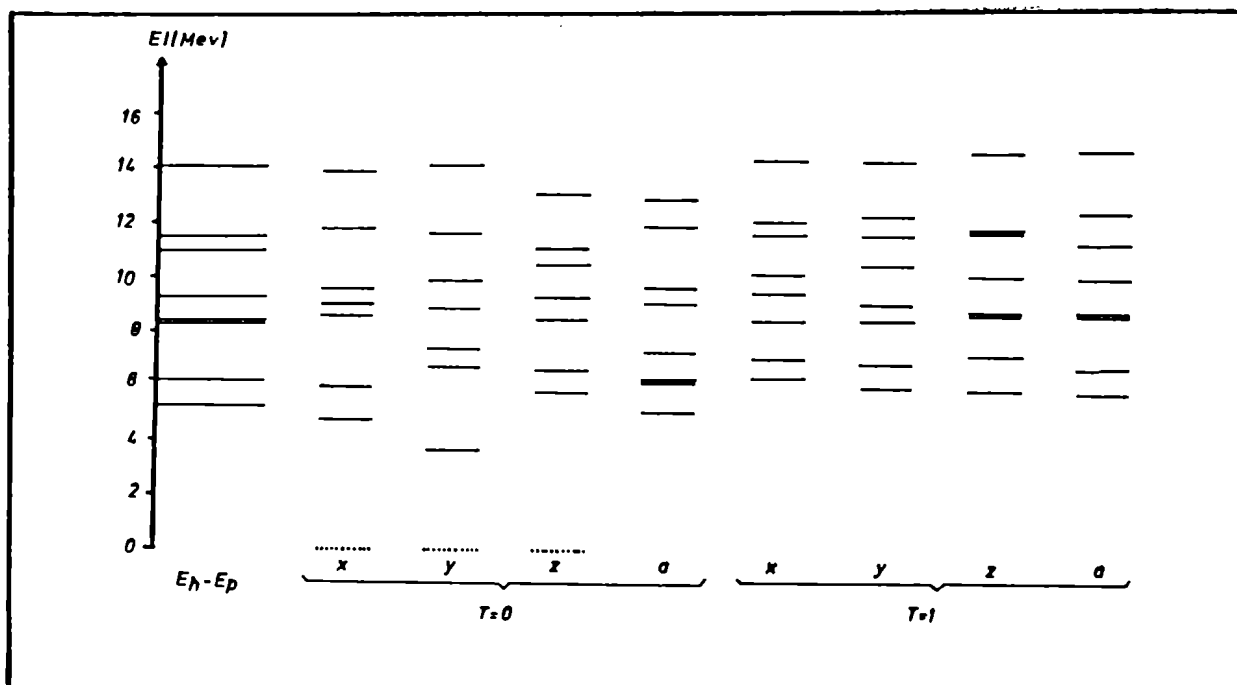


Figura 4.2: Espectro RPA correspondiente al ^{24}Mg . En la primera columna de la figura se muestra el espectro de las excitaciones partícula-agujero sin tomar en cuenta la interacción residual. Los estados punteados corresponden a los modos espúreos $w_0(v, T=0)$.

p h	SU(3)			cranking			RPA		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
3 1	0.43	1.09	-0.08	.0087	.0266	.0070	.0083	.0267	.0039
3 2	1.73	0.94	-0.84	.0753	.0311	-.0796	.0694	.0335	-.0718
4 1	0.59	1.99	-0.36	.0031	.0395	-.0134	.0016	.0410	-.0199
4 2	-0.39	-1.07	-1.43	-.0170	-.0441	-.1145	-.0130	-.0391	-.1180
5 1	-0.11	0.44	0.06	-.0044	.0063	.0036	-.0054	.0094	.0006
5 2	-1.12	0.93	-0.26	-.0285	.0202	-.0183	-.0402	.0171	-.0177
6 1	-0.19	0.08	0.17	-.0026	.0008	.0063	-.0040	-.0011	.0079
6 2	-0.45	0.67	0.07	-.0095	.0128	.0042	-.0090	.0178	.0091

Tabla 4.2: Componentes partícula-agujero de los operadores ángulo θ_v ($v=x,y,z$) calculados según la prescripción SU(3), o resolviendo el sistema de ecuaciones (4.7). Los ángulos "cranking" se obtienen tomando en cuenta sólo la parte de partícula independiente del Hamiltoniano, mientras que en el cálculo de los ángulos "RPA" interviene además la interacción residual. Obsérvese que a pesar del hecho de que los momentos de inercia "cranking" y los momentos de inercia de Thouless-Valatin (RPA) difieren casi en un factor dos, en uno y otro caso los operadores ángulo canónicamente conjugados al impulso angular total del sistema son aproximadamente iguales. El ángulo SU(3) difiere totalmente de los anteriores.

4.4 Cálculo numérico de las correcciones de primer orden a los parámetros inerciales del ^{24}Mg

Para calcular el valor de las correcciones de primer orden a los parámetros de inercia del ^{24}Mg dadas por la expresión (3.65), necesitamos conocer, además de los elementos de matriz de los operadores J_v y θ_v y de las frecuencias y amplitudes de todos los fonones que ya conocemos, los elementos de matriz en la representación fonónica de los operadores R_v ($= [H - \sum_w J_w^2 / 2J_w, \theta_v]$) y K_{vw} ($= -i[\theta_v, J_v] - \delta_{vw}$) y los elementos de matriz RPA fermiónicos del segundo conmutador S_{vw} ($= [R_v, \theta_w]$). Estas tres últimas cantidades las calculamos numéricamente utilizando las expresiones del apéndice B para los elementos de matriz fermiónicos de los conmutadores entre un operador de dos cuerpos (ec. (B.9)) y uno de un cuerpo y entre dos operadores de un cuerpo (ec. (B.4)) y luego utilizando la técnica descrita en el apéndice C para expresar operadores fermiónicos en la base fonónica. El resultado así obtenido para las correcciones a los tres parámetros de inercia fue

$$\begin{aligned} 1/2J_v^{(1)} &= 0.11 \text{ Mev}/\hbar^2 & 1/2J_v^{(2)} &= 0.11 \text{ Mev}/\hbar^2 \\ 1/2J_v^{(3)} &= 0.37 \text{ Mev}/\hbar^2 & & \end{aligned} \quad (4.13)$$

El mismo resultado fue obtenido calculando las correcciones no a partir de la expresión elaborada (3.65) sino a partir de la expansión en serie de potencias de D^{\hbar} de la ecuación (3.45). Es decir, calculamos numéricamente los coeficientes $A_v^{(m)}$ provenientes de las correcciones

diagramáticas (ec. (3.50a)) y los coeficientes $B_V^{(m)}$ provenientes de los valores esperados de los operadores b_V (ec. (3.41)). El programa que efectúa estos cálculos parte de los elementos de matriz fermiónicos de todos los operadores a_V (ec. (3.40)) y b_V (ec. (3.41)) calculados como se indica en el apéndice B a partir de los elementos de matriz del Hamiltoniano original (ec. (A.18)) y los de los operadores J_V y Θ_V (ec. (A.1)). Siguiendo el procedimiento del apéndice C se calculan los correspondientes elementos de matriz RPA para la parte de uno y dos cuerpos de cada uno de los operadores a_V y b_V . Los valores esperados $B_V (= \langle b_V \rangle)$ se calculan como polinomios producto de los polinomios λ y μ (para los fonones físicos, sólo los coeficientes de D^0 son diferentes de cero) multiplicados por los correspondientes elementos de matriz del operador según (C.5a). Para calcular las correcciones diagramáticas A_V , se calculan los elementos de matriz "backward" de los operadores a_V en la base fonónica según (C.5c) (es decir, la parte del operador que crea o destruye dos fonones) como polinomios en $D^{1/2}$. Los diferentes coeficientes $A_V^{(m)}$ se obtienen calculando polinómicamente (3.50a). El procedimiento en sí es sencillo, pues tiene la ventaja de tratar en pie de igualdad todos los operadores que entran en el cálculo, lo cual no sólo simplifica los códigos sino que reduce las posibilidades de errores de programación. Además es importante la verificación numérica de la cancelación de todos los coeficientes $A_V^{(m)} + B_V^{(m)}$ correspondientes a potencias negativas de D y de la independencia del coeficiente $A_V^{(0)} + B_V^{(0)}$ del parámetro arbitrario de gauge, ya que en esta verificación intervienen los mismos elementos que dan como resultado las

correcciones (4.13).

A fin de dar una idea sobre los valores de las diferentes contribuciones a los coeficientes $A_V^{(m)}$ y $B_V^{(m)}$, éstas se muestran en la tabla 4.3.

	$D^{-3/2}$			D^{-1}			$D^{-1/2}$		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
I	-.064	-.061	-.044	-.038	-.030	-.280	-.154	-.172	-1.598
II							.263	.297	1.761
III	.064	.061	.044	.038	.030	.280	-.088	-.115	-0.137
IV	0	0	0	0	0	0	.020	.010	.026

	D^0		
	x	y	z
I	.030	.029	.202
II	.093	.087	.241
III	-.012	-.011	-.073
IV	.11	.11	.37

Tabla 4.3: Coeficientes de las potencias $D^{-3/2}$, D^{-1} , $D^{-1/2}$ y D^0 correspondientes a las diferentes contribuciones A_V (ec. (3.51)) y $(B_V)_i$ (valor esperado de los operadores en (3.41)). En la primera fila se encuentran las contribuciones A_V , en la segunda las contribuciones $(B_V)_1+(B_V)_2+(B_V)_3$, en la tercera aparece $(B_V)_4+(B_V)_5$ y en la última la suma de todas ellas.

4.5 Análisis de los resultados

El Hamiltoniano rotacional cuadrático en las componentes del impulso angular colectivo que obtenemos a partir de la expresión (3.37) puede escribirse como (la discusión que sigue está basada principalmente en las refs. [21] y [31]).

$$\begin{aligned} H_{eff}^{(rot)} &= \sum_v C_v I_v^2 = 1/2 (C_1 + C_3) I^2 \\ &\quad + 1/2 (C_1 - C_3) (I_1^2 + x I_2^2 - I_3^2) \\ &= 1/2 (C_1 + C_3) I^2 + 1/2 (C_1 - C_3) H(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde los parámetros inerciales C_v (normalmente denominados A_v en la literatura) correspondientes al estado fundamental del sistema están dados al orden al que efectuamos los cálculos por

$$C_v = 1/23_v + 1/23_v^{(1)} \quad (4.15)$$

(ecs. (4.8) y (4.13)) y el parámetro de asimetría x está definido como

$$x = (2C_2 - C_1 - C_3) / (C_1 - C_3) \quad (4.16)$$

Para un sistema con $J_1 = J_2$ ($x=1$), el elipsoide de inercia del sistema es un esferoide oblado y para $J_2 = J_3$ ($x=-1$), el elipsoide de inercia es prolado. Si los momentos de inercia tuvieran los valores clásicos de un cuerpo rígido, en el primer caso el cuerpo tendría forma oblada y en el segundo prolada. Sin embargo, recordemos que estamos describiendo las rotaciones

colectivas de un sistema cuántico de muchos cuerpos para el cual simetría axial significa que el momento de inercia con respecto a este eje es cero (no hay rotaciones colectivas alrededor del eje de simetría) y por consiguiente el elipsoide de inercia correspondiente es prolado independientemente de si el sistema en sí tiene forma oblada o prolada.

En nuestro caso obtenemos para los parámetros inerciales corregidos a primer orden los valores (cf. ecs. (4.8) y (4.13))

$$C_1=0.19 \text{ Mev}/\hbar^2 \quad C_2=0.22 \text{ Mev}/\hbar^2 \quad C_3=0.69 \text{ Mev}/\hbar^2 \quad (4.17)$$

es decir, tenemos $x=0.88$.

El rotor triaxial definido por (4.13) es invariante con respecto a rotaciones por un ángulo π alrededor de cada uno de los ejes del sistema intrínseco

$$R_v(\pi)=\exp(-i\pi I_v) \quad v=1,2,3 \quad (4.18)$$

Esta operación de simetría pertenece al grupo puntual D_2 formado por los elementos $1, R_1(\pi), R_2(\pi), R_3(\pi)$. Debido a su carácter abeliano, este grupo posee cuatro representaciones irreducibles unidimensionales que pueden caracterizarse en términos de los autovalores $r_v=\pm 1$ de los operadores $R_v(\pi)$ como

$$\begin{array}{l} (r_1, r_2, r_3) = \begin{pmatrix} (+++) \\ (+--) \\ (-+-) \\ (---) \end{pmatrix} \end{array} \quad (4.19)$$

El producto $r_1 r_2 r_3$ es siempre igual a 1 puesto que se

cumple $R_1(\pi) = R_3(\pi)R_2(\pi)$, en consecuencia, uno de los tres números es redundante y podemos entonces clasificar los estados rotacionales del sistema (es decir, las funciones de onda $\Psi_{IM}(\Omega)$ del producto (2.14), con Ω representando los tres ángulos de Euler) según los números cuánticos r_2, r_3 .

A cada valor de I le corresponden $2I+1$ estados no degenerados de energía

$$E_{rot} = \frac{1}{2} (C_1 + C_3) I(I+1) + \frac{1}{2} (C_1 - C_3) E_{II}(x) \quad (4.20)$$

donde $E_{II}(x)$ son los $2I+1$ autovalores de la matriz $H(x) = I_1^2 + x I_2^2 - I_3^2$ de (4.14).

En la base $\{|IK\rangle\}$ en la que I_3 es diagonal (con autovalor K), los operadores I_1 e I_2 sólo conectan estados que difieren en una unidad en K . Por lo tanto, el Hamiltoniano $H_{eff}^{(rot)}$ de (4.14) tiene elementos de matriz sólo para transiciones que dejan K invariante o que lo cambian en dos unidades. Además, en esta representación $r_3 = e^{-i\pi K}$, es decir, $r_3 = 1$ para K par y $r_3 = -1$ para K impar. Consecuentemente, $H_{eff}^{(rot)}$ no conecta estados con diferente simetría r_3 y la diagonalización de $H(x)$ puede efectuarse separadamente en los subespacios de $I+1$ e I dimensiones correspondientes a las representaciones con K par e impar respectivamente. Tenemos entonces para la función de onda rotacional de la ec. (2.14)

$$\begin{aligned} \Psi_{r_2 r_3; IM}(\Omega) = & ((2I+1)/8\pi^2)^{1/2} \sum_{\substack{K=0, \pm 2, \dots \text{ (si } r_3=1) \\ K=\pm 1, \pm 3, \dots \text{ (si } r_3=-1)}} f(r_2, r_3; IK) D_{MK}^I(\Omega) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Más aún, si en vez de elegir como representación el conjunto de estados $\{|IK\rangle\}$ separamos los estados rotacionales de la base en estados simétricos y antisimétricos con respecto al cambio $K \rightarrow -K$, entonces la función de onda de (4.21) puede dividirse en una función de onda simétrica, Ψ_+ , y una antisimétrica, Ψ_- , (los índices y argumentos que se omiten se sobreentienden)

$$\Psi_+ = ((2I+1)/8\pi^2)^{1/2} \sum_{\substack{K=0,2,\dots \\ K=1,3,\dots}} f(r_1, r_2) (D_{MK}^I + D_{M-K}^I) / (2(1+\sigma_{K0}))^{1/2} \quad (4.22)$$

$$\Psi_- = ((2I+1)/8\pi^2)^{1/2} \sum_{\substack{K=0,2,\dots \\ K=1,3,\dots}} f(r_1, r_2) (D_{MK}^I - D_{M-K}^I) / (2(1+\sigma_{K0}))^{1/2}$$

Debido a que la operación $R_2(\pi)$ invierte el eje 3, usando las propiedades de las matrices D y las reglas de conmutación de los operadores impulso angular en el sistema intrínseco (ref. [21]), puede demostrarse que

$$R_2(\pi) D_{MK}^I(\Omega) = (-1)^{I+K} D_{M-K}^I(\Omega) \quad (4.23)$$

con lo cual resulta para valores enteros de K

$$R_2(\pi) \Psi_{\pm} = \pm (-1)^{I+K} \Psi_{\pm} \quad (4.24)$$

es decir, $r_2 = \pm (-1)^{I+K}$.

Para $K \neq 0$ el Hamiltoniano rotacional no conecta los estados de la base simétricos $\{|IK+\rangle\}$ con los antisimétricos $\{|IK-\rangle\}$, de tal manera que podemos diagonalizar separadamente en los cuatro subespacios expandidos por $\{|IK(\text{par})+\rangle\}, \{|IK(\text{par})-\rangle\},$

$\{IIK(\text{impar})+\rangle\}$ y $\{IIK(\text{impar})-\rangle\}$. Los estados así obtenidos tienen simetría $r_2 r_3 = \pm(-1)^I$ (el signo + para los estados simétricos y el signo - para los antisimétricos). Para $K=0$, $\Psi_+ = \Psi_-$, pero $r_2 = +(-1)^I$, o sea que este estado está incluido en las soluciones Ψ_+ para I par y en Ψ_- para I impar. La tabla 4.4 muestra las simetrías de los diferentes estados para algunos valores de I con K par.

Ahora bien, debido a que el Hamiltoniano intrínseco que describe nuestro sistema tiene simetría elipsoidal, también este Hamiltoniano es invariante frente a las transformaciones pertenecientes al grupo D_2 . Es decir, orientaciones del sistema que difieren en una rotación $R_V(\alpha)$ son indistinguibles y pasan a formar parte de los grados de libertad intrínsecos. De esta forma, para un estado intrínseco caracterizado por los números cuánticos $r_2 r_3$, el espectro rotacional contiene solamente los estados caracterizados por los mismos números cuánticos. En particular, estamos interesados en la banda rotacional montada sobre el estado fundamental intrínseco del sistema. Para los núcleos par-par este estado se obtiene llenando con pares de protones y de neutrones los orbitales deformados degenerados pertenecientes a los conjuntos conjugados por inversión temporal $\{B\}$ y $\{\bar{B}\}$, es decir, llenando simultáneamente los orbitales formados por combinaciones lineales de estados esféricos con $m+\frac{1}{2}$ par y aquellos con $m+\frac{1}{2}$ impar. Este estado tiene los números cuánticos $(+++)$. Por consiguiente, sólo necesitamos determinar los estados rotacionales simétricos de (4.22) si I es par y los antisimétricos en caso contrario. En ambos casos la suma se efectúa sólo sobre K par ($r_3=1$). El espectro correspondiente (ver tabla 4.4) se muestra en la fig. 4.3 para

los tres conjuntos de parámetros inerciales $(C_V)_{TV+corr}$, $(C_V)_{TV}$ y $(C_V)_{crank}$ dados por (4.17), (4.9) y (4.10) respectivamente. En la misma figura se comparan estos espectros con el espectro experimental, el obtenido por McGrory mediante un cálculo de modelo de capas utilizando la misma interacción efectiva que usamos en el presente cálculo y el espectro correspondiente a $C_1 = C_2 = 0.23 \text{ Mev}/\hbar^2$ y $C_3 = 0.94 \text{ Mev}/\hbar^2$ (estos valores fueron obtenidos ajustando los dos primeros niveles experimentales 2^+ suponiendo $C_1 = C_2$).

Para poder juzgar estos resultados tenemos que tener en cuenta los siguientes puntos:

1) El espectro obtenido por McGrory, fig. 4.3(b), mediante un cálculo exacto (en el sentido de la diagonalización del modelo de capas) que reproduce muy bien los resultados experimentales, se compara con el espectro que obtenemos haciendo un cálculo perturbativo a primer orden utilizando la misma interacción efectiva entre los nucleones de valencia, fig. 4.3(a).

Hay una concordancia muy satisfactoria entre los estados más bajos de la banda rotacional con predominancia $K=0$ (2^+ , y 4^+) de ambos espectros. El método que utilizamos para el cálculo a primer orden de los parámetros de inercia es válido para valores pequeños del impulso angular I (cf. sec. 3.3). Por lo tanto, está fuera del alcance del método dar buenos resultados para los estados correspondientes a impulsos angulares mayores que 6 unidades de \hbar .

Para los estados de la banda γ (estados rotacionales con $K=2$ predominantemente), los resultados no son tan satisfactorios. Tanto la cabeza de la banda como el primer

estado 3^+ caen bastante más bajo en energía que los correspondientes estados en el espectro de McGrory. Esta tendencia puede entenderse observando que $\langle Q_\gamma \rangle^{-1} > \langle Q_\beta \rangle^{-1}$ (ec. (4.10)), de tal manera que la convergencia de la parte de la expansión perturbativa correspondiente a las energías asociadas con el grado de libertad γ dado por la asimetría axial, es más lenta que la de las energías correspondientes a la banda con predominancia $K=0$.

La inversión de los estados 4^+_1 , 2^+_2 con respecto al espectro experimental (fig. 4.3(f)) se da tanto en nuestros resultados como en los de McGrory, de tal forma que es un efecto de la interacción efectiva utilizada.

2) Tanto la aproximación "cranking" como la de Thouless-Valatin resultan extremadamente pobres para el caso del ^{24}Mg y, muy probablemente para todos los demás núcleos deformados de la capa s-d. Además es notable el hecho de que la inclusión en el cálculo de una parte de la interacción residual, como es el caso del cálculo de los parámetros inerciales de Thouless-Valatin, no mejore la descripción "cranking" del sistema, tal como se esperaría intuitivamente.

El punto de partida de nuestros cálculos resulta ser en forma muy natural (ver sec. 3.2) los parámetros inerciales de Thouless-Valatin (orden cero del desarrollo perturbativo). Es así como el cálculo de las correcciones de primer orden es importante y, considerando el hecho de que los resultados de orden cero son tan poco satisfactorios, podemos considerar los resultados obtenidos como una muy buena aproximación al espectro del ^{24}Mg . Por consiguiente, podemos afirmar que el método que utilizamos para el cálculo perturbativo no sólo es válido, sino

que ya a primer orden provee una buena descripción del sistema.

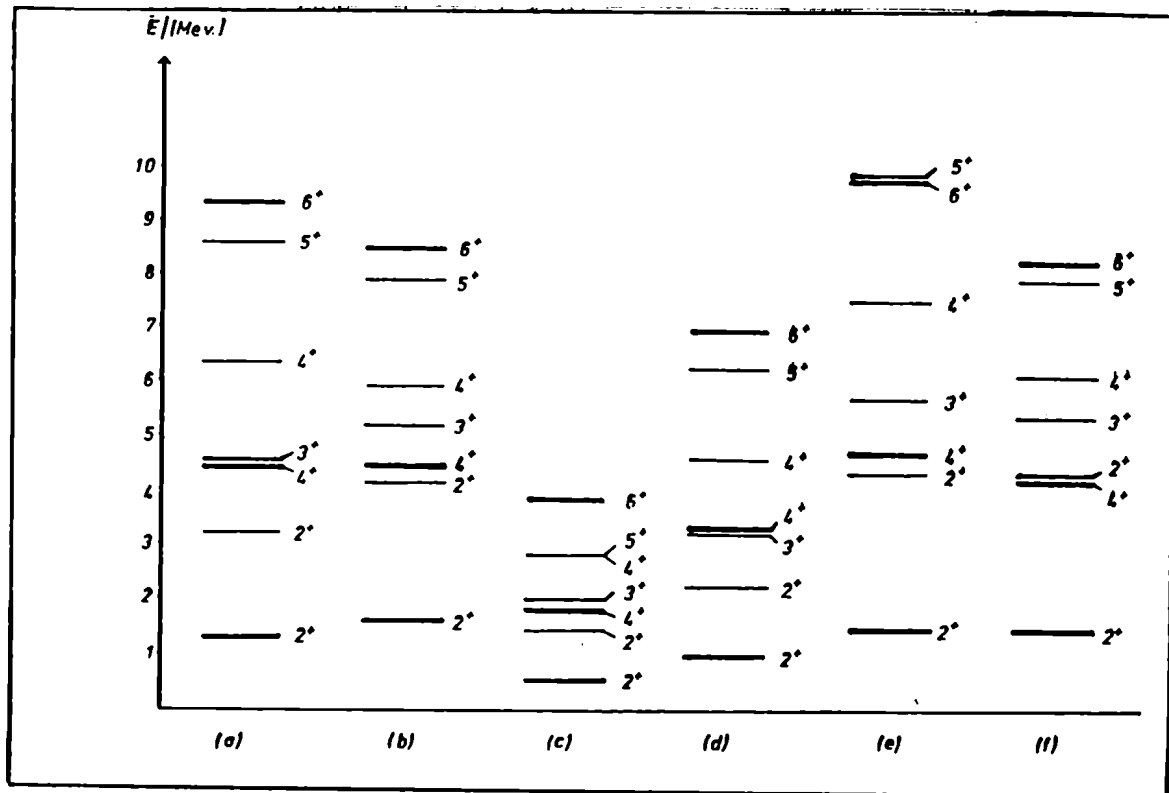


Figura 4.3: Espectros rotacionales de baja energía correspondientes a:

- a) parámetros de inercia obtenidos a primer orden en teoría de perturbaciones en el presente trabajo (ec.(4.17)).
- b) cálculo de modelo de capas utilizando la misma interacción efectiva entre los nucleones de valencia que se utilizó en a).
- c) parámetros de inercia Thouless-Valatin (ec. (4.8)).
- d) parámetros de inercia "cranking" (ec. (4.9)).
- e) ajuste al espectro experimental suponiendo $C_1 = C_2$.
- f) experimento. (ref. [32]).

I	K	$r_1 r_2 r_3$
2	0	+ + +
	2+	+ + +
	2-	- - +
3	0	- - +
	2+	- - +
	2-	+ + +
4	0	+ + +
	2+	+ + +
	2-	- - +
	4+	+ + +
	4-	- - +
5	0	- - +
	2+	- - +
	2-	+ + +
	4+	- - +
	4-	+ + +
6	0	+ + +
	2+	+ + +
	2-	- - +
	4+	+ + +
	4-	- - +
	6+	+ + +
	6-	- - +

Tabla 4.4: Propiedades de simetría de las funciones $D_{MK}^I \pm D_{M-K}^I$ correspondientes a K par frente a rotaciones por un ángulo π alrededor de uno de los ejes. El signo a lado de la proyección K indica si se trata de la combinación simétrica o de la antisimétrica.

V. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos calculado las correcciones a los momentos de inercia de un núcleo deformado mediante la aplicación del método perturbativo adecuado para el tratamiento de sistemas de fermiones en una base deformada desarrollado en los trabajos mencionados en las refs. [12] y [10].

Este tratamiento perturbativo, que tiene su análogo en la cuantificación de las teorías de gauge en el gauge de Coulomb, posee la ventaja de eliminar los grados de libertad no físicos del sistema en el límite $D \rightarrow 0$ y la desventaja de ser sumamente engorroso de aplicar ya que requiere interacciones efectivas de dos cuerpos que son inversamente proporcionales al parámetro D y dependen del parámetro arbitrario A , el cual debe desaparecer de los resultados físicos. Las aplicaciones previas de este método (refs. [12c] y [10]) se limitaron a modelos simples mas no triviales en los que la estructura grupal subyacente permitía por un lado conocer las soluciones exactas del problema, y por el otro simplificaba los cálculos. A diferencia de estos casos, en el presente trabajo hemos tratado un sistema completamente general, donde sólo al orden más bajo en teoría de perturbaciones se preserva cierta estructura de grupo de la cual sacamos provecho para definir los momentos inercia y el operador ángulo canónicamente conjugado al impulso angular total del sistema. Haciendo uso de la simetría esférica del Hamiltoniano original, hemos demostrado que las correcciones que calculamos son finitas en el límite $D \rightarrow 0$ e independientes del parámetro de gauge A .

El procedimiento que empleamos implica tanto una proyección efectiva sobre estados con buen momento angular como la inclusión de otras componentes de la interacción efectiva fuera de las componentes RPA. Estos efectos son tenidos en cuenta a primer orden en el parámetro de expansión $\langle J_V^2 \rangle^{-1}$, el cual debe ser lo suficientemente pequeño para sistemas bien deformados. Además, los resultados obtenidos son válidos en el límite de bajos impulsos angulares.

La ec. (3.65) muestra el resultado final del cálculo para las correcciones de primer orden, $J_V^{(1)}$, a los momentos de inercia de Thouless-Valatin, J_V . Los casos tratados en [10] y [12c] corresponden a un rotor ideal con momentos de inercia J_V y, por lo tanto, tienen $J_V^{(1)}=0$. Para un sistema general, los momentos de inercia $J_V^{(1)}$ toman en cuenta, a primer orden en teoría de perturbaciones, la desviación del sistema de un rotor ideal con momentos de inercia Thouless-Valatin.

Hemos además efectuado los cálculos para el caso del ^{24}Mg , un núcleo bien deformado para el cual conocemos una interacción efectiva realista y el espectro correspondiente calculado mediante una diagonalización del modelo de capas (ref. [13]). En este caso especial se da el hecho de que los parámetros de inercia de orden cero resultan muy pequeños y, por lo tanto, la desviación del sistema de un rotor ideal con momentos de inercia Thouless-Valatin es muy importante. En consecuencia, es de esperarse que las correcciones de primer orden a los momentos de inercia sean grandes. En efecto, las correcciones resultan del mismo tamaño que el término de orden cero. No obstante este hecho, el espectro rotacional de bajas energías obtenido perturbativamente concuerda bastante bien con el espectro

exacto.

APENDICE A

Operadores en la base deformada

La base deformada (orbitales de Nilsson) completa que usamos para la descripción de nuestro sistema está formada por todos los vectores de estado pertenecientes al conjunto $\{B\}U(\bar{B})$ para protones y para neutrones (ver sección 3.1). En este apéndice escribiremos las expresiones generales para operadores de uno y dos cuerpos en la base deformada y evaluaremos los correspondientes elementos de matriz para el operador impulso angular total y para el Hamiltoniano.

i) Operadores de un cuerpo

Todos los operadores de un cuerpo que aparecen en nuestro cálculo son isoescalares (i.e. no conectan estados con diferente proyección de isospín). En la base deformada expresamos un operador isoescalar de un cuerpo P en términos de sus elementos de matriz como

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{\substack{k_1, k_2 \in \{B\}U(\bar{B}) \\ m_{t1}, m_{t2}}} \langle k_1 m_{t1} | P | k_2 m_{t2} \rangle : c_{k_1 m_{t1}}^+ c_{k_2 m_{t2}} : \delta m_{t1} m_{t2} \\
 &= (2)^{1/2} \sum_{k_1, k_2 \in \{B\}U(\bar{B})} P(k_1, k_2) [: c_{k_1}^+ c_{k_2} :]_{T=0}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde

$$P(k_1, k_2) = \langle k_1, 1/2 | P | k_2, 1/2 \rangle = \langle k_1, -1/2 | P | k_2, -1/2 \rangle \tag{A.2}$$

Si el operador tiene un comportamiento definido frente a las operaciones de conjugación Hermítica e inversión temporal, es decir si

$$P^+ = h(P) P \quad \text{con } h(P)=\pm 1$$

y

(A.3)

$$\tau P \tau^{-1} = t(P) P \quad \text{con } t(P)=\pm 1$$

los elementos de matriz $\langle k_1 | P | k_2 \rangle$ no son todos independientes dado que podemos escribir

$$\begin{aligned} P^+ &= \sum_{k_1 k_2} \langle k_1 | P | k_2 \rangle^* :c_{k_2}^+ c_{k_1}: \\ &= \sum_{k_1 k_2} \langle k_2 | P | k_1 \rangle^* :c_{k_1}^+ c_{k_2}: \\ &= c(P) \sum_{k_1 k_2} \langle k_2 | P | k_1 \rangle :c_{k_1}^+ c_{k_2}: \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde $c(P)=\pm 1$ según los elementos de matriz del operador sean reales o imaginarios. (Por simplicidad hemos incluido en k_i la proyección m_{t_i} del isospín del estado y se entiende que $k_1, k_2 \in (B) \cup (\bar{B})$). Entonces, definiendo $f(P) = c(P)h(P)$, tenemos que

$$\langle k_1 | P | k_2 \rangle = f(P) \langle k_2 | P | k_1 \rangle \quad (\text{A.5})$$

Además

$$\bar{P} = \tau P \tau^{-1} = \sum_{k_1 k_2} \langle \bar{k}_1 | \bar{P} | \bar{k}_2 \rangle :c_{\bar{k}_1}^+ c_{\bar{k}_2}: \quad (\text{A.6})$$

Sabiendo que $\langle \bar{k}_1 | \bar{P} | \bar{k}_2 \rangle = \langle k_1 | P | k_2 \rangle^*$, (ver ref. [21]), y

definiendo $g(P) = t(P)c(P)$, obtenemos

$$\langle k_1 | P | k_2 \rangle = g(P) \langle \bar{k}_1 | P | \bar{k}_2 \rangle \quad (A.7)$$

Si conocemos los elementos de matriz del operador P en la base esférica $\{|\alpha\rangle\} = \{|n l j m t m_t\rangle\}$, entonces, aplicando la transformación de Nilsson (3.3) obtenemos

$$\langle k_1 | P | k_2 \rangle = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \langle k_1 | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 | k_2 \rangle \langle \alpha_1 | P | \alpha_2 \rangle \quad (A.8)$$

Para el cálculo de los elementos de matriz del operador J en la base deformada, expresamos primero las componentes cartesianas J_x en términos de las componentes esféricas J_+, J_-, J_0 para las cuales conocemos sus elementos de matriz en la base esférica y luego transformamos según (A.8). Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \langle k_1 | J_x | k_2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \langle k_1 | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 | k_2 \rangle [((j_2 - m_2)(j_2 + m_2 + 1))^{1/2} \delta m_1 m_2 + 1 \\ &\quad + ((j_2 + m_2)(j_2 - m_2 + 1))^{1/2} \delta m_1 m_2 - 1] \delta j_1 j_2 \\ \langle k_1 | J_y | k_2 \rangle &= -i/2 \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \langle k_1 | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 | k_2 \rangle [((j_2 - m_2)(j_2 + m_2 + 1))^{1/2} \delta m_1 m_2 + 1 \\ &\quad - ((j_2 + m_2)(j_2 - m_2 + 1))^{1/2} \delta m_1 m_2 - 1] \delta j_1 j_2 \\ \langle k_1 | J_z | k_2 \rangle &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \langle k_1 | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 | k_2 \rangle m_1 \delta m_1 m_2 \delta j_1 j_2 \end{aligned} \quad (A.9)$$

Vemos que J_x y J_y sólo conectan estados que difieren en 1 en la proyección m del impulso angular total y J_0 sólo conecta estados con la misma proyección m . Entonces, debido a la elección del conjunto de estados deformados $\{B\}$, (ver secc.

3.1), los elementos de matriz de J_x y de J_y sólo serán diferentes de cero entre estados que pertenezcan a $\{B\}$ y a $\{\bar{B}\}$, mientras que los de J_0 son diferentes de cero entre estados que pertenezcan a $\{B\}$ o entre estados que pertenezcan a $\{\bar{B}\}$.

Además tenemos que los elementos de matriz de J_x y J_z son reales mientras que los de J_y son imaginarios, es decir $c(J_x) = c(J_z) = 1$, $c(J_y) = -1$. Como $h(J_v) = 1$, se tiene que

$$f(J_x) = f(J_z) = 1 \quad f(J_y) = -1 \quad (\text{A.10})$$

Para investigar el comportamiento frente a inversión temporal de los operadores J_v , usamos la propiedad de transformación de un tensor esférico $T_{\lambda\mu}$:

$$\tau T_{\lambda\mu} \tau^{-1} = (-1)^{\lambda+\mu} T_{\lambda-\mu} \quad (\text{A.11})$$

Es decir, tenemos que $t(J_+) = t(J_-) = 1$ y $t(J_0) = -1$, con lo cual obtenemos

$$g(J_x) = 1 \quad g(J_y) = g(J_z) = -1 \quad (\text{A.12})$$

Haciendo uso de las propiedades (A.10) y (A.12), la parte partícula-agujero de los operadores J_v se escribe como

$$\begin{aligned} (J_x)_{ph} &= (2)^{1/2} \sum_{ph} J_x(ph) [(c_p^+ c_{\bar{h}} + c_{\bar{p}}^+ c_h) + (c_p^+ c_{\bar{h}} + c_{\bar{p}}^+ c_h)^+]_{T=0} \\ (J_y)_{ph} &= (2)^{1/2} \sum_{ph} J_y(ph) [(c_p^+ c_{\bar{h}} - c_{\bar{p}}^+ c_h) - (c_p^+ c_{\bar{h}} - c_{\bar{p}}^+ c_h)^+]_{T=0} \\ (J_z)_{ph} &= (2)^{1/2} \sum_{ph} J_z(ph) [(c_p^+ c_h + c_{\bar{p}}^+ c_{\bar{h}}) - (c_p^+ c_h + c_{\bar{p}}^+ c_{\bar{h}})^+]_{T=0} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

con $p, h \in \{B\}$.

Las componentes partícula-agujero $(\theta_V)_{RPA}$ de los operadores angulares están definidas a través de los conmutadores (3.17) y (3.18). En particular, (3.18) determina las propiedades de simetría frente a conjugación hermitica e inversión temporal de los operadores θ_V , ya que si se definen los θ_V como operadores hermiticos, entonces resulta $c([\theta_V, J_V]) = h([\theta_V, J_V]) = t([\theta_V, J_V]) = -1$. Dadas las propiedades (A.10) y (A.12) para J_V , estas condiciones se satisfacen si

$$f(\theta_V) = -f(J_V) \quad (A.14)$$

$$g(\theta_V) = g(J_V)$$

Para el cálculo numérico de los momentos de inercia es conveniente definir operadores θ_V y J_V con elementos de matriz reales tales que

$$\theta_V = (-i)^V \theta_V \quad (A.15)$$

$$J_V = i(-i)^V J_V$$

ii) Operadores de dos cuerpos

Un operador general de dos cuerpos, C , lo escribimos en la base deformada completa ($\{B\}U\{\bar{B}\}$ para protones y neutrones) en términos de sus elementos de matriz como

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, k_4 \in (B) \cup (\bar{B}) \\ m_{t_1}, m_{t_2}, m_{t_3}, m_{t_4}}} \langle k_1 m_{t_1}; k_2 m_{t_2} | C | k_3 m_{t_3}; k_4 m_{t_4} \rangle \quad (A.16)$$

$$: c_{k_1 m_{t_1}}^+ c_{k_2 m_{t_2}}^+ c_{k_4 m_{t_4}} c_{k_3 m_{t_3}} :$$

El comportamiento del operador frente a las operaciones de conjugación hermitica e inversión temporal se expresa, tal como se hizo para los operadores de un cuerpo, en términos de las cantidades $f(C)$ y $g(C)$ tales que

$$\langle k_1 m_{t_1}; k_2 m_{t_2} | C | k_3 m_{t_3}; k_4 m_{t_4} \rangle = f(C) \langle k_4 m_{t_4}; k_3 m_{t_3} | C | k_2 m_{t_2}; k_1 m_{t_1} \rangle \quad (A.17)$$

$$= g(C) \langle k_1 m_{t_1}; k_2 m_{t_2} | C | k_3 m_{t_3}; k_4 m_{t_4} \rangle$$

En el caso particular del Hamiltoniano se tiene que $f(H)=g(H)=1$. Además en este caso conocemos los elementos de matriz del operador en la base esférica acoplados a buen J y a buen T , de tal manera que aplicando la transformación (3.3) y desacoplando en momento angular e isospín podemos escribir

$$\langle k_1 k_2 | V | k_3 k_4 \rangle_a = \sum_{\alpha\beta} \sum_{\gamma\delta} \langle k_1 | \alpha \rangle \langle k_2 | \beta \rangle \langle \gamma | k_3 \rangle \langle \delta | k_4 \rangle$$

$$\sum_{JM} \sum_{T M_T} \langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM \rangle \langle j_\gamma m_\gamma j_\delta m_\delta | JM \rangle$$

$$\langle 1/2 m_{t_\alpha} 1/2 m_{t_\beta} | T M_T \rangle \langle 1/2 m_{t_\gamma} 1/2 m_{t_\delta} | T M_T \rangle \langle \alpha\beta; JT | V | \gamma\delta; JT \rangle_a$$

$$\delta m_{t_\alpha} m_{t_\beta} \delta m_{t_\gamma} m_{t_\delta} \quad (A.18)$$

donde, por simplicidad en la notación, hemos incluido en k_i la proyección m_{t_i} del isospín que indica si el orbital es de protón o de neutrón y las sumas sobre los estados esféricos van sobre los números cuánticos n, l, j y m .

APENDICE B

Conmutadores y anticonmutadores

En este apéndice escribiremos las expresiones generales para los conmutadores y anticonmutadores usados en el cálculo. Para ello hacemos uso de las siguientes propiedades de los productos de operadores escritos en orden normal

$$[:c_{k_1}^+ c_{k_2}: , :c_{j_1}^+ c_{j_2}:] = :c_{k_1}^+ c_{j_2}: \delta_{k_2 j_1} - :c_{j_1}^+ c_{k_2}: \delta_{k_1 j_2} + (n_{k_1} - n_{k_2}) \delta_{k_1 j_2} \delta_{k_2 j_1} \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} [:c_{k_1}^+ c_{k_2}^+ c_{k_4} c_{k_3}: , :c_{j_1}^+ c_{j_2}:] = & :c_{k_1}^+ c_{k_2}^+ c_{k_4} c_{j_2}: \delta_{k_3 j_1} \\ & - :c_{k_1}^+ c_{k_2}^+ c_{k_3} c_{j_2}: \delta_{k_4 j_1} \\ & + :c_{j_1}^+ c_{k_1}^+ c_{k_4} c_{k_3}: \delta_{k_2 j_2} \\ & - :c_{j_1}^+ c_{k_2}^+ c_{k_4} c_{k_3}: \delta_{k_1 j_2} \\ & + (n_{j_2} - n_{j_1}) (:c_{k_1}^+ c_{k_3}: \delta_{k_4 j_1} \delta_{k_2 j_2} - :c_{k_2}^+ c_{k_3}: \delta_{k_4 j_1} \delta_{k_1 j_2} \\ & + :c_{k_2}^+ c_{k_4}: \delta_{k_1 j_2} \delta_{k_3 j_1} - :c_{k_1}^+ c_{k_4}: \delta_{k_3 j_1} \delta_{k_2 j_2}) \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} :c_{k_1}^+ c_{k_2}: :c_{j_1}^+ c_{j_2}: = & :c_{k_1}^+ c_{j_1}^+ c_{k_2} c_{j_2}: \\ & + (1 - n_{k_2}) :c_{k_1}^+ c_{j_2}: \delta_{k_2 j_1} \\ & - n_{k_1} :c_{j_1}^+ c_{k_2}: \delta_{k_1 j_2} \\ & + (1 - n_{k_2}) n_{k_1} \delta_{k_1 j_2} \delta_{j_1 k_2} \end{aligned} \quad (B.3)$$

n_{k_i} indica el número de ocupación del estado k_i .

i) Conmutador de operadores de un cuerpo

El conmutador $X=[A,B]$ de dos operadores isoescalares de un cuerpo A y B es nuevamente un isoescalar y puede escribirse como

$$X = [A,B] = (2)^{1/2} \sum_{k_1, k_2 \in (B) \cup (\bar{B})} X(k_1, k_2) (:c_{k_1}^+ c_{k_2}:)_{T=0} + X^{(0)} \quad (B.4)$$

Utilizando la relación (B.1) obtenemos los elementos de matriz $X(k_1, k_2)$ de la parte de un cuerpo del conmutador y la constante $X^{(0)}$ en términos de los elementos de matriz $A(k_1, k_2)$ y $B(k_1, k_2)$ de los operadores A y B (ec. (A.2)):

$$X(k_1, k_2) = \sum_{k \in (B) \cup (\bar{B})} (A(k_1, k)B(k, k_2) - B(k_1, k)A(k, k_2)) \quad (B.5)$$

$$X^{(0)} = 2 \sum_{p \in (B) \cup (\bar{B})} (-A(p, h)B(h, p) + A(h, p)B(p, h)) \quad (B.6)$$

Las propiedades de simetría de X frente a conjugación hermitica e inversión temporal están dadas en términos de las cantidades f y g correspondientes a los operadores A y B (ecs. (A.5) y (A.7)):

$$f(X) = -f(A)f(B) \quad (B.7)$$

$$g(X) = g(A)g(B)$$

Como caso particular de (B.5), tenemos que los elementos

de matriz RPA (ph) del conmutador están dados por

$$\begin{aligned}
 X(ph) = & \sum_{p'} A(pp')B(p'h) - B(pp')a(p'h) \\
 & + \sum_{h'} A(ph')B(h'h) - B(ph')A(h'h)
 \end{aligned}
 \tag{B.8a}$$

de tal manera que si A y B sólo tienen elementos partícula-agujero, la parte de un cuerpo del conmutador es cero. En el caso del conmutador $[(J_v)_{RPA}, (J_w)_{RPA}]$, la constante también se hace cero ya que (B.6) puede escribirse como

$$X^{(0)} = 2 \sum_{ph \in \{B\}} (A(ph)B(ph) + A(ph)B(ph))(f(A) - f(B))(1 + g(A)g(B))
 \tag{B.8b}$$

de donde puede verse que para $A=J_v$ y $B=J_w$, $X^{(0)}$ se anula para todo v,w, con lo cual se muestra que

$$[(J_v)_{RPA}, (J_w)_{RPA}] = 0
 \tag{B.8c}$$

ii) Conmutador entre un operador de dos cuerpos y un operador de un cuerpo.

El conmutador $Y=[C,P]$ entre un operador de dos cuerpos C, dado por (A.14), y un operador de un cuerpo P, dado por (A.1), se escribe como

$$\begin{aligned}
 Y = [C,P] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1 k_2 k_3 k_4 \in \{B\} \\ m_1 m_2 m_3 m_4}} \langle k_1 m_1; k_2 m_2 | Y^{(2)} | k_3 m_3; k_4 m_4 \rangle \\
 : c_{k_1 m_1}^+ c_{k_2 m_2}^+ c_{k_4 m_4} c_{k_3 m_3} :
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k_1 k_2 \in (B)U(\bar{B})} \langle k_1 m_{t_1} | Y^{(1)} | k_2 m_{t_2} \rangle : c_{k_1 m_{t_1}}^+ c_{k_2 m_{t_2}} : \quad (B.9)$$

$Y^{(2)}$ e $Y^{(1)}$ indican la parte de dos y de un cuerpo del operador Y y sus elementos de matriz quedan definidos por

$$\begin{aligned} \langle k_1 k_2 | Y^{(2)} | k_3 k_4 \rangle = \sum_k & (\langle k_1 k_2 | C | k k_3 \rangle - \langle k_1 k_2 | C | k_3 k \rangle) \langle k | I | k_4 \rangle \\ & + (\langle k k_2 | C | k_3 k_4 \rangle - \langle k_2 k | C | k_3 k_4 \rangle) \langle k_1 | I | k \rangle \end{aligned} \quad (B.10a)$$

$$\begin{aligned} \langle k_1 | Y^{(1)} | k_2 \rangle = \sum_{k_3 k_4} & (n_{k_4} - n_{k_3}) \langle k_3 | I | k_4 \rangle (\langle k_1 k_4 | C | k_2 k_3 \rangle \\ & - \langle k_1 k_4 | C | k_3 k_2 \rangle) \end{aligned} \quad (B.10b)$$

En (B.10) hemos incluido en el índice k_i la proyección m_{t_i} del isospín de la órbita k_i y las sumas se efectúan sobre estados pertenecientes a $(B)U(B)$.

Las propiedades de simetría del operador Y , tal como en (B.7), están dadas por

$$f(Y) = -f(C)f(P) \quad (B.11)$$

$$g(Y) = g(C)g(P)$$

iii) Anticonmutador de dos operadores de un cuerpo.

El anticonmutador $Z = \{A, B\}$ de dos operadores isoescalares de un cuerpo se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Z = \{A, B\} = 1/2 \sum_{\substack{k_1 k_2 k_3 k_4 \in (B)U(\bar{B}) \\ m_{t_1} m_{t_2} m_{t_3} m_{t_4}}} & \langle k_1 m_{t_1} ; k_2 m_{t_2} | Z^{(2)} | k_3 m_{t_3} ; k_4 m_{t_4} \rangle \\ & : c_{k_1 m_{t_1}}^+ c_{k_2 m_{t_2}}^+ c_{k_4 m_{t_4}} c_{k_3 m_{t_3}} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k_1 k_2 \in \{B\} \cup \{\bar{B}\}} \langle k_1 m_{t_1} | Z^{(1)} | k_2 m_{t_2} \rangle : c_{k_1 m_{t_1}}^\dagger c_{k_2 m_{t_2}} : \\
& + Z^{(0)}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Incluyendo nuevamente la proyección del isospín m_{t_i} en k_i , escribimos para los elementos de matriz de la parte de dos y de un cuerpo del operador Z

$$\langle k_1 k_2 | Z^{(2)} | k_3 k_4 \rangle = \langle k_1 | A | k_4 \rangle \langle k_2 | B | k_3 \rangle \delta m_{t_1} m_{t_4} \delta m_{t_2} m_{t_3} \tag{B.13a}$$

$$\begin{aligned}
\langle k_1 | Z^{(1)} | k_2 \rangle = & \sum_{k \in \{B\} \cup \{\bar{B}\}} (1 - 2n_k) (\langle k_1 | A | k \rangle \langle k | B | k_2 \rangle \\
& + \langle k | A | k_2 \rangle \langle k_1 | B | k \rangle) \delta m_{t_1} m_{t_2}
\end{aligned} \tag{B.13b}$$

Para la constante, $Z^{(0)}$, obtenemos con ph como índices de partícula-agujero

$$Z^{(0)} = 2 \sum_{ph \in \{B\} \cup \{\bar{B}\}} A(ph) B(ph) (f(A) + f(B)) \tag{B.13c}$$

Las propiedades del operador Z frente a las operaciones de conjugación Hermítica y de inversión temporal quedan determinadas por

$$f(Z) = f(A) f(B) \tag{B.14}$$

$$g(Z) = g(A) g(B)$$

Operador	f	g
J_v	$-(-1)^v$	$(-1)^{v+1}$
θ_v	$(-1)^v$	$(-1)^{v+1}$
K_{vw}	$(-1)^{v+w}$	$(-1)^{v+w+2}$
H	1	1
R_v	$-(-1)^v$	$(-1)^{v+1}$
S_{vw}	$(-1)^{v+w}$	$(-1)^{v+w+2}$

Tabla B.1: Propiedades de simetría de los operadores de uno y dos cuerpos utilizados en el cálculo.

APENDICE C

Expresión de los operadores fermiónicos en términos de bosones

i) Operadores de dos cuerpos

Queremos expresar la parte RPA de un operador de dos cuerpos C dado por (A.14) y con las propiedades de simetría (A.16) en términos de los operadores bosónicos $\gamma_{ph}^+(s, T, M)$, los cuales se definen a través de una correspondencia biunívoca con los operadores de creación de pares partícula-agujero $G_{ph}^+(v, T, M)$ de la ec. (3.5).

Como todos los operadores que utilizamos en nuestro cálculo son isoescalares, entonces proponemos la siguiente expansión RPA para el operador de dos cuerpos C

$$\begin{aligned}
 C_{RPA} = \frac{1}{2} \sum_s \sum_{ph} \sum_{s' p' h'} \{ & C_f^T(s; ph | s'; p' h') [\gamma_{ph}^+(s, T, M) \gamma_{p' h'}(s', T, M) \\
 & + f(C) \gamma_{p' h'}^+(s', T, M) \gamma_{ph}(s, T, M)] \\
 & + (-1)^{T-M} C_b^T(s; ph | s'; p' h') [\gamma_{ph}^+(s, T, M) \gamma_{p' h'}^+(s', T, -M) \\
 & + f(C) \gamma_{ph}(s, T, M) \gamma_{p' h'}(s', T, -M)] \}
 \end{aligned}
 \tag{C.1}$$

Los elementos de matriz C_f^T y C_b^T pueden ser determinados efectuando una doble conmutación del operador C_{RPA} con los operadores γ^+ y γ . Suponiendo que estos elementos de matriz están también dados por los valores esperados en el estado

fundamental de los conmutadores correspondientes entre el operador original C y los operadores fermiónicos G^+ y G que crean y destruyen pares de partícula-agujero, obtenemos

$$\begin{aligned} [[C_{RPA}, \gamma_{ph}(s, T, M)], \gamma_{p'h'}^+(s', T, M)] &= -C_f^T(s; ph|s'; p'h') \\ &= \langle I[[C, G_{ph}(s, T, M)], G_{p'h'}^+(s', T, M)]I \rangle \end{aligned} \quad (C.2a)$$

$$\begin{aligned} [[C_{RPA}, \gamma_{ph}(s, T, M)], \gamma_{p'h'}(s', T, M)] &= (-1)^{T-M} C_b^T(s, ph|s'; p'h') \\ &= \langle I[[C, G_{ph}(s, T, M)], G_{p'h'}(s', T, M)]I \rangle \end{aligned} \quad (C.2b)$$

Usando la definición (3.5) de los operadores G_{ph}^+ , los valores esperados de los conmutadores dobles del lado derecho de las expresiones (C.2) pueden ser calculados obteniéndose así y las expresiones para los vértices C_f^T y C_b^T . En la tabla C.1 se muestran estas cantidades en términos de la siguiente combinación de los elementos de matriz del operador C (ec. (A.14))

$$\begin{aligned} W(k_1, k_2, k_3, k_4; T) &= \sum_{m_{t_1} m_{t_2} m_{t_3} m_{t_4}} (-1)^{m_{t_1} + m_{t_2}} \langle 1/2 m_{t_1} 1/2 -m_{t_2} | TM \rangle \\ &\quad \langle 1/2 m_{t_3} 1/2 -m_{t_4} | TM \rangle [\langle k_1 m_{t_1}; k_2 m_{t_2} | C | k_3 m_{t_3}; k_4 m_{t_4} \rangle \\ &\quad - \langle k_1 m_{t_1}; k_2 m_{t_2} | C | k_4 m_{t_4}; k_3 m_{t_3} \rangle] \end{aligned} \quad (C.3)$$

Obsérvese que las propiedades de simetría del operador frente a inversión temporal (ec. (A.16) y tabla B.1) determinan qué par de índices (s, s') aparecen en la expansión RPA de la ec. (C.1). En el caso del Hamiltoniano, $f(H) = g(H) = 1$ y además los elementos de matriz de H_b^T y H_f^T entre un número impar de estados pertenecientes al conjunto $\{B\}$ son cero (ver tabla C.1). De esta manera en la ec. (C.1) para H_{RPA} sólo sobreviven los vértices con $s = s'$. La versión RPA del Hamiltoniano representa un

conjunto de osciladores armónicos acoplados, los cuales son desacoplados mediante la transformación de la ec. (3.8).

Volviendo al caso general, efectuamos la transformación inversa a la transformación de (3.8) y obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
 C_{RPA} = & (1+f(C))(1+g(C)) \sum_T (2T+1) \sum_{s,n} C_0^T(s,n) \\
 & + \sum_{TM} \sum_{s,s'} \sum_{n,n'} \{ C_f^T(s,n|s',n') [\Gamma_n^+(s,T,M) \Gamma_{n'}(s',T,M) \\
 & + f(C) \Gamma_{n'}^+(s',T,M) \Gamma_n(s,T,M)] \\
 & + (-1)^{T-M} C_b^T(s,n|s',n') [\Gamma_n^+(s,T,M) \Gamma_{n'}^+(s',T,-M) \\
 & + f(C) \Gamma_n(s,T,M) \Gamma_{n'}(s',T,-M)] \}
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
 C_0^T(s,n) = & (1/4) \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} [C_f^T(s;ph|s;p'h') \mu(n,p'h';s,T) \\
 & + C_b^T(s;ph|s;p'h') \lambda(n,p'h';s,T)] \mu(n,ph;s,T)
 \end{aligned} \tag{C.5a}$$

$$\begin{aligned}
 C_f^T(s,n|s',n') = & \\
 & 1/2 \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} [C_f^T(s;ph|s';p'h') [\lambda(n,ph;s,T) \lambda(n',p'h';s',T) \\
 & + f(C) \mu(n,ph;s,T) \mu(n',p'h';s',T)] \\
 & + C_b^T(s;ph|s';p'h') [\lambda(n,ph;s,T) \mu(n',p'h';s',T) \\
 & + f(C) \lambda(n',p'h';s',T) \mu(n,ph;s,T)]]
 \end{aligned} \tag{C.5b}$$

$$\begin{aligned}
C_b^T(s, n | s', n') = & \\
& \frac{1}{2} \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} \{ C_f^T(s; ph | s'; p'h') [\lambda(n, ph; s, T) \mu(n', p'h'; s', T) \\
& \qquad \qquad \qquad + f(C) \mu(n, ph; s, T) \lambda(n', p'h'; s', T)] \\
& + C_b^T(s; ph | s'; p'h') [\lambda(n, ph; s, T) \lambda(n', p'h'; s', T) \\
& \qquad \qquad \qquad + f(C) \mu(n, ph; s, T) \mu(n', p'h'; s', T)] \} \\
& \qquad \qquad \qquad (C.5c)
\end{aligned}$$

Ahora escribimos explícitamente aquellos términos en (C.4) en los que aparecen los fonones espúreos ($s=v, T=0, n=0$). Haciendo uso de las expresiones (3.29) para los coeficientes de la transformación $\lambda(n=0, ph; v, T=0)$ y $\mu(n=0, ph; v, T=0)$, podemos aislar la dependencia en D de los diferentes términos en (C.4) que usamos explícitamente en el cálculo.

Para la contribución de los fonones espúreos al valor esperado del operador S_{vv} (ec. (3.43)) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_w S_0^0(w, 0) = & \\
& -(2w_0 D)^{-1} \sum_w \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} [(-1)^w S_b^0(w; ph | w; p'h') \\
& \qquad \qquad \qquad + S_f^0(w, ph | w, p'h')] J_w(ph) J_w(p'h') \\
& \qquad \qquad \qquad (C.6) \\
& + i \sum_w (-1)^w \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} S_f^0(w; ph | w; p'h') J_w(ph) \theta_w(p'h')
\end{aligned}$$

En (C.6) , y de ahora en adelante, omitimos los términos correspondientes a potencias positivas de D.

En el cálculo de las correcciones a los momentos de

inercia, los vértices $C_f^0(w,0|w',0)$ y $C_b^0(w,0|w',0)$ se necesitan para el caso del operador R_v (ec. (3.41)). En este caso, (v,w,w') son índices cíclicos y $f(R_v) = -(-1)^v$ (ver tabla B.1). En consecuencia, en estos vértices sólo aparecen términos independientes de D y A

$$\begin{aligned}
 R_f^0(v+1,0|v+2,0) &= 2i(-i)^v \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} \{ J_{v+1}(ph) \theta_{v+2}(p'h') \\
 &\quad [R_f^0(v+1,ph|v+2,p'h') - (-1)^{v+2} R_b^0(v+1,ph|v+2,p'h')] \\
 &\quad + J_{v+2}(p'h') \theta_{v+1}(ph) \\
 &\quad [R_f^0(v+1,ph|v+2,p'h') + (-1)^{v+2} R_b^0(v+1,ph|v+2,p'h')] \} \\
 &\hspace{15em} (C.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_b^0(v+1,0|v+2,0) &= 2i(-i)^v \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} \{ J_{v+1}(ph) \theta_{v+2}(p'h') \\
 &\quad [R_b^0(v+1,ph|v+2,p'h') - (-1)^{v+2} R_f^0(v+1,ph|v+2,p'h')] \\
 &\quad + J_{v+2}(p'h') \theta_{v+1}(ph) \\
 &\quad [R_b^0(v+1,ph|v+2,p'h') + (-1)^{v+2} R_f^0(v+1,ph|v+2,p'h')] \}
 \end{aligned}$$

Para los vértices del operador R_v en los cuales intervienen un fonón espúreo y uno físico obtenemos

$$R_b^0(w,0|s,n) = (2Dw_0)^{-1/2} R_1(w,0|s,n) + (Dw_0/2)^{1/2} R_2(w,0|s,n) \hspace{10em} (C.8)$$

$$\begin{aligned}
 R_f^0(w,0|s,n) &= (-1)^{1/2} [-(2Dw_0)^{-1/2} R_1(w,0|s,n) \\
 &\quad + (Dw_0/2)^{1/2} R_2(w,0|s,n)]
 \end{aligned}$$

donde los índices (v, w, s) , de nuevo son cíclicos si $v \neq w$ y $s=a$ si $v=w$. Las cantidades R_1 y R_2 están definidas por

$$\begin{aligned}
 R_1(w, 0|s, n) = & \\
 & -i(i)^w \sum_{ph} J_w(ph) \sum_{p'h'} \{ [\lambda(n, p'h'; s, 0) - (-1)^s \mu(n, p'h'; s, 0)] \\
 & [R_b^0(w, ph|s, p'h') - (-1)^s R_f^0(w, ph|s, p'h')] \}
 \end{aligned}
 \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
 R_2(w, 0|s, n) = & \\
 & (i)^w \sum_{ph} \theta_w(ph) \sum_{p'h'} \{ [\lambda(n, p'h'; s, 0) + (-1)^s \mu(n, p'h'; s, 0)] \\
 & [R_b^0(w, ph|s, p'h') + (-1)^s R_f^0(w, ph|s, p'h')] \}
 \end{aligned}$$

ii) Operadores de un cuerpo

Tal como se mencionó en la sección 3.3, cualquier operador de un cuerpo, P , puede ser descompuesto en un término P_{RPA} que contiene solamente elementos de matriz partícula-agujero, y en un término de dispersión P_s . En el sentido de la expansión en potencias del parámetro Q^{-1} , el primero es mayor que el segundo. Usando la definición (A.1) para el operador de un cuerpo y las propiedades de simetría dadas por (A.5) y (A.7), podemos escribir la parte P_{RPA} del operador en términos de los operadores bosónicos definidos en la sección 3.2 como

$$\begin{aligned}
 P_{RPA} = & 2 \sum_s \sum_{ph} P_s(ph) [\gamma_{ph}^+(s, T=0, M=0) + f(P) \gamma_{ph}(s, T=0, M=0)] \\
 = & \sum_s \sum_n P_s(n) [\Gamma_n^+(s, T=0, M=0) + f(P) \Gamma_n(s, T=0, M=0)]
 \end{aligned}
 \tag{C.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
 P_x(ph) &= 1/2 (1+g(P))P(ph) \\
 P_y(ph) &= 1/2 (1-g(P))P(ph) \\
 P_z(ph) &= 1/2 (1-g(P))P(ph) \\
 P_a(ph) &= 1/2 (1+g(P))P(ph)
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

y

$$P_s(n) = 2 \sum_{ph} P_s(ph) [\lambda(n, ph; s, T=0) + f(P) \mu(n, ph; s, T=0)] \tag{C.12}$$

La contribución de los fonones espúreos ($v, n=0, T=0$) es (c.f. ecs. (3.30))

$$\begin{aligned}
 P_v(0) &= -ii^v (2/w_0 D)^{1/2} \sum_{ph} J_v(ph) P_v(ph) [1 + (-1)^v f(P)] \\
 &\quad - ii^v (2/w_0 A)^{1/2} \sum_{ph} \theta_v(ph) P_v(ph) [1 - (-1)^v f(P)]
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

Para el caso particular del operador K_{vw} definido en (3.32), podemos escribir a partir de (C.10) y (C.13) y usando las propiedades de simetría que aparecen en la tabla B.1

$$\begin{aligned}
 K_{vw} &= -i(i)^{w'} (1-d_{vw}) (1/2 D w_0)^{1/2} k_{ww'} [\Gamma_0^+(w') + (-1)^{w'} \Gamma_0(w')] \\
 &\quad + \sum_n (K_{vw})_s(n) [\Gamma_n^+(s) + (-1)^s \Gamma_n(s)]
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

donde hemos separado la contribución de los fonones espúreos de la de los fonones físicos (sumatoria primada). Además

$$k_{ww'} = 8 \sum_{ph} (K_{vw})_{w'}(ph) J_{w'}(ph) \tag{C.15}$$

Los índices (v,w,w') y (v,w,s) son cíclicos si $v \neq w$ y si $v=w$, entonces $s=a$. Los elementos de matriz fonónicos $(K_{vw})_s(n)$ se calculan como en (C.12) y los fermiónicos $(K_{vw})_{w'}(ph)$ están dados por (C.11). En el texto utilizamos la notación más clara

$$K_{vw}(s,n) = (K_{vw})_s(n) \quad (C.16)$$

$$K_{vw}(w',ph) = (K_{vw})_{w'}(ph)$$

Una expansión cuasi-bosónica (ver, por ejemplo ref. [7]) permite una representación de la parte de dispersión, P_s , del operador de un cuerpo análoga a la del operador de dos cuerpos en (C.1) o (C.4), donde los coeficientes $P_f^T(s,ph|s',p'h')$ están dados, como en (C.2), por los dobles conmutadores

$$\begin{aligned} [[(P_s)_{RPA}, \gamma_{ph}(s,T,M)], \gamma_{p'h'}^+(s',T,M)] &= -P_f^T(s|ph|s'|p'h') \\ &= \langle [[(P_s), G_{ph}(s,T,M)], G_{p'h'}^+(s',T,M)] \rangle \quad (C.17) \end{aligned}$$

y los coeficientes $P_b^T(s,ph|s',p'h')$ son todos iguales a cero. Definimos ahora la combinación

$$Y(k_1 m_{t1}, k_2 m_{t2}, k_3 m_{t3}, k_4 m_{t4}) = \quad (C.18)$$

$$\begin{aligned} &(1-n_{k_1}-n_{k_3})^2 (n_{k_2}-n_{k_4}) \langle k_1 m_{t1} | P | k_3 m_{t3} \rangle \delta k_2 k_4 \delta m_{t2} m_{t4} \\ &- (1-n_{k_2}-n_{k_4})^2 (n_{k_2}-n_{k_3}) \langle k_2 m_{t2} | P | k_4 m_{t4} \rangle \delta k_1 k_3 \delta m_{t1} m_{t3} \end{aligned}$$

Debido al hecho de que P es un operador isoescalar, tenemos que

$$Y(k_1 k_2 k_3 k_4; T) = \quad (C.19)$$

$$\sum_{m_{t_1} m_{t_2}} (-1)^{1-2m_{t_2}} \langle 1/2 m_{t_1} 1/2 -m_{t_2} | TM \rangle^2 Y(k_1 m_{t_1} k_2 m_{t_2} k_3 m_{t_1} k_4 m_{t_2})$$

De esta forma los coeficientes $P_f^T(s, ph|s', p'h')$ son exactamente análogos a los coeficientes $C_f^T(s, ph|s', p'h')$ de la tabla C.1 cambiando los elementos de matriz $W(k_1 k_2 k_3 k_4; T)$ por las cantidades $Y(k_1 k_2 k_3 k_4; T)$ definidas en (C.19).

Para el caso especial del la parte de un cuerpo, H_0 , del Hamiltoniano (ec. (3.2)), resulta

$$(H_0)_{RPA} = \sum_s \sum_{\substack{ph \\ p'h'}} (\epsilon_p - \epsilon_h) \delta_{pp'} \delta_{hh'} \sum_{TM} r_{ph}^+(s, TM) r_{p'h'}(s, TM) \quad (C.20)$$

s	s'	$C_b^T(s, ph s'; p'h')/(1+d_{ss'})$
<hr/>		
x	x	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(\bar{p}'\bar{p}hh'; T)+W(p'\bar{p}h\bar{h}'; T)]$
x	y	$-\frac{1}{2}(1-g(C))[W(\bar{p}'\bar{p}hh'; T)-W(p'\bar{p}h\bar{h}'; T)]$
x	z	$\frac{1}{2}(1-g(C))[W(p'\bar{p}hh'; T)+W(p'p\bar{h}h'; T)]$
x	a	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(p'\bar{p}hh'; T)+W(p'p\bar{h}h'; T)]$
<hr/>		
y	y	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(\bar{p}'\bar{p}hh'; T)-W(p'\bar{p}h\bar{h}'; T)]$
y	z	$-\frac{1}{2}(1+g(C))[W(p'\bar{p}hh'; T)-W(p'p\bar{h}h'; T)]$
y	a	$-\frac{1}{2}(1-g(C))[W(p'\bar{p}hh'; T)-W(p'p\bar{h}h'; T)]$
<hr/>		
z	z	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(p'phh'; T)-W(p'\bar{p}hh'; T)]$
z	a	$\frac{1}{2}(1-g(C))[W(p'phh'; T)-W(p'\bar{p}hh'; T)]$
<hr/>		
a	a	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(p'phh'; T)+W(p'\bar{p}hh'; T)]$

		$C_f^T(s, ph s'; p'h')/(1+d_{ss'})$
<hr/>		
	x	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(\bar{h}'\bar{p}hp'; T)+W(h'\bar{p}h\bar{p}'; T)]$
	y	$\frac{1}{2}(1-g(C))[W(\bar{h}'\bar{p}hp'; T)-W(h'\bar{p}h\bar{p}'; T)]$
	z	$\frac{1}{2}(1-g(C))[W(h'\bar{p}hp'; T)-W(h'p\bar{h}p'; T)]$
	a	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(h'\bar{p}hp'; T)-W(h'p\bar{h}p'; T)]$
<hr/>		
y	y	$-\frac{1}{2}(1+g(C))[W(\bar{h}'\bar{p}hp'; T)-W(h'\bar{p}h\bar{p}'; T)]$
y	z	$-\frac{1}{2}(1+g(C))[W(h'\bar{p}hp'; T)-W(h'p\bar{h}p'; T)]$
y	a	$\frac{1}{2}(1-g(C))[W(h'\bar{p}hp'; T)-W(h'p\bar{h}p'; T)]$
<hr/>		
z	z	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(h'php'; T)-W(h'\bar{p}h\bar{p}'; T)]$
z	a	$\frac{1}{2}(1-g(C))[W(h'php'; T)-W(h'\bar{p}h\bar{p}'; T)]$
<hr/>		
a	a	$\frac{1}{2}(1+g(C))[W(h'php'; T)+W(h'\bar{p}h\bar{p}'; T)]$

Tabla C.1: Elementos de matriz RPA para un operador general de dos cuerpos. La cantidad W está definida en (C.3). Para obtener los elementos de matriz correspondientes a las componentes de dispersión de un operador de un cuerpo simplemente hay que sustituir los elementos de matriz W por las cantidades Y definidas en C.19.

APENDICE D

Relaciones Utiles

En este apéndice deducimos algunas de las relaciones necesarias para demostrar que en la expansión de la ec. (3.45) para las correcciones a los parámetros inerciales sólo sobrevive el coeficiente de D^0 y que éste es independiente del parámetro de gauge A.

$$i) \quad (-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} - (-1)^{v+1} k_{v+2,v+1} = i \quad (D.1)$$

La demostración de esta igualdad parte de la definición de las cantidades k_{ww} , (ec. (C.15)). Se tiene que

$$\begin{aligned} k_{v+1,v+2} &= 8 \sum_{ph} K_{v,v+1}(v+2;ph) J_{v+2}(ph) \\ &= -8i \sum_{ph} J_{v+2}(ph) \left[\sum_{h'} \theta_v(ph') J_{v+1}(h'h) - \sum_{p'} \theta_v(p'h) J_{v+1}(pp') \right] \end{aligned} \quad (D.2)$$

Para $k_{v+2,v+1}$ se obtiene una expresión semejante. Construyendo la diferencia, obtenemos

$$\begin{aligned} &(-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} - (-1)^{v+1} k_{v+2,v+1} = \\ &-8i(-1)^v \sum_{ph} \theta_v(ph) \sum_j \left[J_{v+1}(pj) J_{v+2}(jh) - J_{v+1}(jh) J_{v+2}(pj) \right] \end{aligned} \quad (D.3)$$

donde el índice j indica que la sumatoria se efectúa sobre estados de partícula y estados de agujero. La expresión entre paréntesis cuadrados no es otra cosa que los elementos de matriz

partícula-agujero del conmutador $[J_{v+1}, J_{v+2}] = iJ_v$. Por lo tanto tenemos

$$(-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} - (-1)^{v+1} k_{v+2,v+1} =$$

$$8(-1)^v \sum_{ph} \theta_v(ph) J_v(ph) = [\theta_v, J_v]_{RPA} = i \quad \text{q.e.d.}$$

$$ii) \quad w_n(s,0) K_{vw}(s,n) = 2i^w R_1(w,0|s,n) \quad n>0 \quad (D.4)$$

donde $R_1(w,0|s,n)$ es la combinación de elementos de matriz fonónicos del operador R_v definida en la ec. (C.9)

Debido a la invariancia rotacional del Hamiltoniano original H , se tiene que

$$0 = [\theta_v, [J_w, H]] = i [K_{vw}, H] + [[H, \theta_v], J_w] \quad (D.5)$$

Al orden más bajo, el conmutador en el primer término del lado derecho de (D.5) se obtiene haciendo uso de las expresiones RPA bosónicas de las ecs. (3.16) y (C.14).

$$\begin{aligned} i [K_{vw}, H] = & -i \sum_n w_n(s,0) K_{vw}(s,n) [\Gamma_n^+(s,0) - (-1)^s \Gamma_n(s,0)] \\ & + i(-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} J_{v+2} \sigma_{w,v+1} / 3_{v+2} \\ & + i(-1)^{v+1} k_{v+2,v+1} J_{v+1} \sigma_{w,v+2} / 3_{v+1} \end{aligned} \quad (D.6)$$

El segundo término del lado derecho de la ec. (D.5) se expresa en términos del operador R_v (ec. (3.41)), obteniendo

$$[H, \theta_v] = R_v - iJ_v/3_v - i \sum_w \{J_w, K_{vw}\} / 23_w \quad (D.7)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 [J_w, [H, \theta_v]] &= [J_w, R_v] \\
 &- \sigma_{w,v+1} J_{v+2} \left(1/3_v - i[J_{v+1}, K_{v,v+2}] / 3_{v+2} \right) \\
 &- \sigma_{w,v+2} J_{v+1} \left(1/3_v - i[J_{v+2}, K_{v,v+1}] / 3_{v+1} \right)
 \end{aligned} \quad (D.8)$$

En (D.8) hemos conservado tan sólo aquellos términos que son de orden $O(Q^{1/2})$; por lo tanto, usamos para el conmutador $[J_w, R_v]$ la versión fonónica, la cual se obtiene a partir de (3.30a) y (C.7)

$$\begin{aligned}
 [J_w, R_v] &= -i i^w (2Dw_0)^{1/2} \sum_n [R_b(w, 0|s, n) - (-1)^s R_f(w, 0|s, n)] \\
 &\quad [\Gamma_n^+(s, 0) - (-1)^s \Gamma_n(s, 0)]
 \end{aligned} \quad (D.9)$$

Combinando como en (D.5) los términos de (D.6) and (D.9) que corresponden a los fonones físicos, $n > 0$, y haciendo uso de la ec. (C.9) que define las cantidades $R_1(w, 0|s, n)$, obtenemos inmediatamente la expresión (D.4). q.e.d.

$$\text{iii) } R_f(v+1, 0|v+2, 0) = i^v (-1)^{v+2} \left(1/43_{v+1} + 1/43_{v+2} - 1/23_v \right) \quad (D.10a)$$

$$R_b(v+1, 0|v+2, 0) = i^v \left(1/43_{v+1} - 1/43_{v+2} \right) \quad (D.10b)$$

Estas ecuaciones se obtienen a partir de los términos en (D.6) and (D.9) que corresponden a los fonones espúreos $n=0$. Utilizando (D.1), y, como en el caso anterior, haciendo uso de la ec. (D.5), se llega en forma inmediata a las igualdades (D.10). q.e.d.

$$iv) \sum_w [[S_{vv}, J_w], J_w] = 8 \sum_w i^w (-1)^s \sum_n K_{vw}(s, n) R_1(w, 0 | s, n) \quad (D.11)$$

$$+ 8 i i^v [(-1)^{v+2} k_{v+2, v+1} + (-1)^{v+1} k_{v+1, v+2}] R_b(v+1, 0 | v+2, 0)$$

Conmutamos el lado derecho de la ec. (D.5) con J_w y con θ_v . Luego de ciertas manipulaciones algebraicas, obtenemos despreciando términos de orden $O(Q^{-1/2})$ y superiores

$$[[[[H, \theta_v], \theta_v], J_w], J_w] = 2i [J_w, [K_{vw}, [H, \theta_v]]] \quad (D.12)$$

Necesitamos ahora relacionar el doble conmutador $[[H, \theta_v], \theta_v]$ con la cantidad S_{vv} definida por la ec. (3.43) en la misma forma en la que relacionamos el conmutador $[H, \theta_v]$ con R_v para obtener (D.7). Utilizando esta última expresión, obtenemos

$$[[H, \theta_v], \theta_v] = S_{vv} - 1/3_v - 2K_{vv}/3_v \sum_w K_{vw}^2/3_w - i \sum_w \{J_w, [K_{vw}, \theta_v]\}/23_w \quad (D.13)$$

Ahora conmutamos dos veces con J_w , de tal manera que despreciando nuevamente los términos de orden $O(Q^{-1/2})$ (y superiores), podemos escribir el lado derecho de la ec. (D.12) como

$$[[[[H, \theta_v], \theta_v], J_w], J_w] = [[S_{vv}, J_w], J_w] - 2[[K_{vv}, J_w], J_w]/3_v - 2 \sigma_{w, v+1} [K_{v, v+2}, J_{v+1}]^2 / 3_{v+2} - 2 \sigma_{w, v+2} [K_{v, v+1}, J_{v+2}]^2 / 3_{v+1} \quad (D.14)$$

Reemplazando ahora (D.7) en el lado derecho de la ec.

(D.12), se tiene que

$$\begin{aligned}
 [J_w, [K_{vw}, [H, \theta_v]]] &= [J_w, [K_{vw}, R_v]] + i[[K_{vw}, J_w], J_w] / 3_v \quad (D.15) \\
 + \sigma_{w,v+1} (-1)^{v+1} k_{v+2,v+1} [-1/3_v + i(-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} / 3_{v+2}] \\
 + \sigma_{w,v+2} (-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} [1/3_v + i(-1)^{v+1} k_{v+2,v+1} / 3_{v+1}]
 \end{aligned}$$

Hemos así evaluado, al orden que nos interesa, ambos lados de (D.12). Efectuando la sumatoria sobre w y usando la igualdad (B.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_w [[S_{vv}, J_w], J_w] &= 2i \sum_w [J_w, [K_{vw}, R_v]] + 2/3_v \quad (D.16) \\
 + 2i [(-1)^{v+2} k_{v+1,v+2} / 3_{v+1} - (-1)^{v+1} k_{v+2,v+1} / 3_{v+2}]
 \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de esta última ecuación se calcula al orden más bajo usando las versiones fonónicas de los operadores correspondientes (ecs. (3.30a), (C.14) y (C.4)), para obtener finalmente

$$\begin{aligned}
 \sum_w [J_w, [K_{vw}, R_v]] &= -2i i^v (-1)^{v+1} R_f(v+1, 0 | v+2, 0) \\
 + 2i [(-1)^{v+1} k_{v+1,v+2} + (-1)^{v+2} k_{v+2,v+1}] R_b(v+1, 0 | v+2, 0) \\
 - 4i \sum_w i^w (-1)^s \sum_n K_{vw}(s, n) R_1(w, 0 | s, n) \quad (D.17)
 \end{aligned}$$

Si se reemplaza (D.17) en la ec. (D.16) y se hace uso de las relaciones (D.10) entre los momentos de inercia de orden cero y los elementos de matriz del conmutador R_v , se obtiene inmediatamente la expresión (D.11). q.e.d.

Obsérvese que la identidad de la ec. (D.1) se obtiene

simplemente a partir de las propiedades de conmutación de los operadores impulso angular, mientras que las otras relaciones (ii)-iv)), son consecuencia directa de la simetría esférica del problema original.

mod. 11/11

A handwritten signature in cursive script, possibly reading "Blum", enclosed within a large, hand-drawn arrow pointing to the right.

Manfred Weber

REFERENCIAS

- 1) D.R.Inglis, Phys. Rev. 96 (1954) 1059.
- 2) S.T.Belyaev, Kgl. Danske Videnskab. Selskab Mat. Fys. Medd. 31 (11) (1959).
- 3) D.J.Thouless y J.G.Valatin, Nucl. Phys. 31 (1962) 211.
- 4) F.H.Villars y G.Cooper, Ann. of Phys. 56 (1970) 224.
- 5) A.K.Kerman y A.Klein, Phys. Rev 132 (1963) 1326.
- 6) E.R.Marshalek y J.Weneser, Phys. Rev. C2 (1970) 1682.
- 7) S.T.Belyaev y V.G.Zelevinskii, Nucl. Phys. 39 (1962) 582.
- 8) E.R.Marshalek, Nucl. Phys. A224 (1974) 221,245.
- 9) E.R.Marshalek, Preimpreso de la Universidad de Notre Dame, Notre Dame, Indiana,(1982)
- 10) D.R.Bes, O.Civitarese y H.M.Sofia, Nucl.Phys. A370(1981)99.
- 11)
 - a) H.J.Mang, Phys. Repts. 18C (1975) 325.
 - b) K.Hara, A.Hayashi y P.Ring, Nucl.Phys. A385 (1982) 14.
 - c) A.Faessler, Procs. of the Symp. on Nuclear Structure 1985, Copenhagen.
 - d) K.W.Schmid y F.Gruemmer, Nucl.Phys, Procs. of the Nuclear Physics Workshop, I.C.T.P., Trieste, 1981. Editor C.Dasso, North-Holland (1982).
- 12)
 - a) V.Alessandrini, D.R.Bes, y B.Machet, Nucl. Phys. B142 (1978) 489.
 - b) V.Alessandrini, D.R.Bes, y B.Machet, Phys. Lett. 80B (1978) 9.
 - c) D.R.Bes, G.G.Dussel y R.P.J.Perazzo, Nucl. Phys. A340

(1980) 157.

13)

a) J.McGrory, comunicación privada.

b) W.Chung, Tesis de Doctorado , Michigan State University, sin publicar (1976).

14) R.P.Feynman y A.R.Gibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, (1965).

15) L.D.Fadeev y V.N.Popov, Phys. Lett. 25B (1967) 29

16) J.L.Gervais, A.Jewicki y B.Sakita, Phys.Rev.D12(1975)1038

17) S.Colemann, "An Introduction to Spontaneous Symmetry Breakdown and Gauge Fields", International Summer School of Physics Ettore Majorana, (1973).

18) G.'tHooft, Nucl. Phys. B33 (1971) 173.

19) V.Alessandrini, D.R.Bes, O.Civitarese, M.T.Mehr, Phys. Lett. 148B (1984) 395.

20) T.D.Lee, "Particle Physics and Introduction to Field Theory", Harwood Academic Publishers, Nueva York, (1981).

21) A.Bohr y B.R.Mottelson, "Nuclear Structure", Vol.II. Benjamin, Nueva York, (1969).

22) D.Bohm y D.Pines, Phys. Rev. 92 (1953) 609.

23) P.Ring y P.Schuck, "The Nuclear Many-Body Problem", Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, Nueva York, (1980).

24) D.J.Thouless, Nucl. Phys. 22 (1961) 78.

25) E.C.Halbert et al, Adv. in Nucl. Phys., vol. 4. Editores M.Baranger y E.Vogt, Plenum Press, Nueva York (1971).

26) T.Hamada y I.D.Johnston, Nucl. Phys. 34 (1962) 382.

27)

a) T.T.S.Kuo y G.E.Brown, Nucl. Phys. 85 (1966) 40.

b) T.T.S.Kuo, Ann. Rev. of Nucl. Sci. 24 (1974) 101.

- 28) K.A.Brueckner, Phys. Rev. 97 (1955) 1353.
- 29) G.Ripka, Adv. in Nucl. Phys., vol. 1. Editores M.Baranger y E.Vogt, Plenum Press, Nueva York (1968).
- 30) R.H.Helm, Phys. Rev. 104 (1956) 1466.
- 31) L.D.Landau y E.M.Lifshitz, "Quantum Mechanics", Pergamon Press Ltd. , Londres, (1958).
- 32)"Table of Isótopes". Editores C.H.Leaderer y V.S.Shirley, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, séptima edición (1978).